

超越标准模型：粒子物理与 宇宙学中的希格斯引力作用

(申请清华大学理学博士学位论文)

培养单位： 工程物理系

学 科： 物理学

研 究 生： 鲜于中之

指导教师： 何红建 教授

二〇一五年五月

Beyond Standard Model: Higgs-Gravitational Interactions in Particle Physics and Cosmology

Dissertation Submitted to
Tsinghua University
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy
in
Physics

by
Xianyu Zhongzhi

Dissertation Supervisor : Professor He Hongjian

May, 2015

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

作者签名：_____

导师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘要

本文从电弱对称性破缺与宇宙暴胀两个角度，研究 Higgs 场的万有引力相互作用理论及其可观测效应。本研究旨在探索量子引力在电弱对称性破缺机制中可能的作用与效应、探索 Higgs 场驱动早期宇宙暴胀的新机制，从而深化我们对超越标准模型的电弱对称性破缺以及量子引力的认识。

在粒子物理方面，本文首先研究时空维数自发缩减（SDR）这种新奇量子引力现象。为此，本文将建立一套模型无关的 SDR 有效场论，并将其应用于电弱破缺尺度，以展示 SDR 对纵向玻色子散射分波振幅的幺正性的改善。本文同时计算了 SDR 以及量子引力导致的 Higgs 反常耦合在纵向玻色子散射中的新信号。其次，本文研究 Higgs 场与时空的标量曲率间的非最小耦合的物理效应。为此，本文在 Jordan 系和 Einstein 系中分别显式验证 Goldstone 玻色子等价定理，验证 Jordan 系和 Einstein 系对于计算规范玻色子散射振幅的等价性，并由此推导出对非最小耦合的定量幺正性限制，及其在 LHC 与未来对撞机上的信号。

在暴胀宇宙学方面，本文将介绍以标准模型 Higgs 玻色子为暴胀子的 Higgs 暴胀模型，并仔细研究该模型的幺正性问题。通过计算大背景场下的 Goldstone 粒子散射振幅，本文得到了对暴胀理论的定量幺正性限制，确证了 Higgs 暴胀的幺正性。本文也介绍量子修正对 Higgs 暴胀的影响，并讨论 Higgs 真空的稳定性对 Higgs 暴胀的限制，以及在此类暴胀模型中超越标准模型的必要性。

随后，本文将介绍三类在新物理框架下实现 Higgs 暴胀的机制。首先，我们讨论质量在 TeV 尺度的中性玻色子与矢量型夸克对 Higgs 暴胀的影响。这些新粒子与 Higgs 场的相互作用可改善 Higgs 真空稳定性，同时可扩展理论的参数空间。其次，我们介绍一类无标超引力框架下的大统一理论，以及 Higgs 暴胀在其中的实现。为此，我们首先以超对称 $SU(5)$ 大统一理论为例，解释此类模型的构造，并得到平方势和指数平坦的 Starobinsky 势，作为此类模型的两个特殊极限。随后我们将此类模型推广到 Flipped $SU(5)$ 理论与 Pati-Salam 模型。最后，我们介绍渐进安全量子引力中的 Higgs 暴胀。其中，我们在紫外选取引力的非高斯固定点与物质场耦合的高斯固定点，这使得 Higgs 势在高能区足够平坦且满足慢滚条件，从而能够驱动早期宇宙的暴胀。这三类 Higgs 暴涨模型均可确保 Higgs 真空的稳定性，并与 Higgs 玻色子和顶夸克质量的对撞机测量结果相容。

关键词：超越标准模型；量子引力；纵向玻色子散射；Higgs 暴胀

Abstract

In this thesis we study the theory and observable effects of Higgs gravitational interaction, focusing on electroweak symmetry breaking and cosmic inflation. We explore possible quantum gravitational effects in electroweak symmetry breaking, and new mechanism of Higgs-driven inflation in early universe, in order to deepen our understanding toward electroweak breaking beyond the Standard Model as well as quantum gravity.

We firstly study a novel quantum gravitational effect known as spontaneous dimensional reduction (SDR). We construct a model-independent effective field theory of SDR, and apply it to the electroweak scale. We use this effective theory to illustrate the improved unitarity of partial wave amplitude of longitudinal boson scattering due to SDR. We also find new signals for longitudinal boson scattering from SDR and quantum-gravity-induced Higgs anomalous coupling. Then, we study the non-minimal coupling between the Higgs field and the scalar curvature of the spacetime. We explicitly verify the Goldstone boson equivalence theorem, and justify the equivalence between Jordan and Einstein frame in computing scattering amplitudes of longitudinal bosons. We derive a unitarity bound for the non-minimal coupling, and study its signal at LHC and future colliders.

In the second part of the thesis, we introduce the Higgs Inflation model in which the Standard Model Higgs field is identified as inflaton, and study its unitarity problem. We get quantitative unitarity bound on this theory by computing Goldstone amplitude with large inflaton background, and justify the unitarity of Higgs inflation. We also discuss the effect of quantum correction to Higgs inflation, and the related problem of Higgs instability, as well as the necessity of new physics beyond the Standard Model.

Then we introduce three scenarios of Higgs inflation with new physics. Firstly, we study the effect of new neutral scalar and vector quark of TeV mass to the Higgs inflation. Then we describe a class of grand unification theories in the framework of no-scale supergravity, and realize Higgs inflation in this type of theory. For this purpose we use supersymmetric $SU(5)$ as an example, and then generalize it to Flipped $SU(5)$ and Pati-Salam model. At last, we describe an asymptotically safe Higgs inflation, in which the gravity reaches a non-Gaussian fixed point in high energy, while matter couplings flow to trivial fixed point. This scenario will make Higgs potential flat enough to satisfy slow-roll condition, and to achieve a successful inflation. All these three scenarios can guarantee the stability of Higgs vacuum, and are consistent with collider measurements of Higgs and top quark masses.

Key words: beyond Standard Model; quantum gravity; longitudinal boson scattering; Higgs inflation

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 电弱与引力相互作用理论简介	7
2.1 电弱对称性破缺与 BEH 机制	7
2.2 广义相对论与引力的有效场论	11
2.3 超越标准模型：超对称与大统一	15
2.3.1 整体超对称与最小超对称标准模型	15
2.3.2 大统一理论	20
2.4 量子引力模型简介	22
2.4.1 超引力	22
2.4.2 其他量子引力模型与维数自发缩减	25
第 3 章 Higgs-引力作用与弱规范玻色子散射	30
3.1 维数自发缩减及其有效理论	30
3.1.1 电弱破缺的 SDR 有效理论	30
3.1.2 分波分析与幺正性	34
3.1.3 TeV 尺度 SDR 下的纵向玻色子散射截面	38
3.1.4 讨论	42
3.2 Higgs 场与引力的非最小耦合	44
3.2.1 Jordan 系与 Einstein 系	44
3.2.2 弱规范玻色子散射振幅与等价定理	50
3.2.3 散射截面与对撞机信号	57
第 4 章 标准模型 Higgs 暴胀	60
4.1 暴胀宇宙学简介	60
4.1.1 经典动力学	61
4.1.2 量子涨落与暴胀观测量	63
4.2 Higgs 暴胀的经典理论	67
4.3 Higgs 暴胀的幺正性	70

4.4 Higgs 暴胀的量子修正	74
4.4.1 Higgs 真空稳定性问题	75
4.4.2 Higgs 暴胀势的量子修正	77
4.4.3 Higgs 暴胀的参数空间：大 ξ 情形与临界情形	82
第 5 章 Higgs 暴胀：超越标准模型	83
5.1 Higgs 暴胀与 TeV 质量的重粒子	84
5.1.1 模型结构	84
5.1.2 暴胀势与暴胀观测量	87
5.1.3 讨论与小结	93
5.2 超引力中的 Higgs 暴胀	94
5.2.1 概述	95
5.2.2 无标 $SU(5)$ 大统一理论	96
5.2.3 推广：Flipped $SU(5)$ 模型与 Pati-Salam 模型	102
5.3 渐进安全的 Higgs 暴胀	105
第 6 章 结语	111
参考文献	114
致 谢	130
声 明	131
附录 A n 维时空散射振幅与散射截面的幺正性条件	132
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	136

第1章 引言

近代物理学，乃至近代科学，开端于 Newton 力学。Newton 力学之精要，在于物体运动的 Newton 三定律和万有引力定律。在这套运动定律中，有两个核心概念，至今仍是物理学所关注的重点，一是脱胎于 Newton 运动定律的（惯性）质量，二即万有引力^①。

惯性质量是物质最基本的属性之一。根据 Newton 定律，加速度是物体对外力的响应，而惯性质量度量其响应的强度。另一方面，引力是自然界最普遍的现象之一。大至星辰运行、小如苹果落地，都有引力的作用。根据 Newton 的万有引力定律，两物体间引力的强度正比于两者的引力质量，换言之，引力质量是引力的荷。在 Newton 力学中，惯性质量和引力质量本是一对逻辑上相互独立的概念。然而，物理学家很早就通过实验发现，惯性质量与引力质量互成正比^②。从 Galileo 时代至今，无数实验以愈来愈高的精度验证着这一事实。Einstein 深刻认识到它的重要性，并将其发展为等效原理。粗略言之，既然惯性质量和引力质量相等，则物体对引力的响应与其自身的物理性质无关。以此为基础，Einstein 终于发展出一套引力的动力学理论，即广义相对论。然而即使在广义相对论中，等效原理也是未经解释的经验事实。为等效原理指出理论上的来源，需要量子场论。概言之，等效原理是引力作为自旋为 2 的零质量粒子所传递的相互作用的必然后果。

量子场论无疑极大深化了我们对物理世界的理解。仅就质量这一概念而言，它不但能提供对等效原理的解释，同时还回答了另一个也许是更基本的问题，即，（惯性）质量的起源问题。根据现代粒子物理的标准模型（Standard Model, SM），基本粒子的质量来源于电弱对称性的自发破缺^③。在这破缺的机制中，Higgs 场扮演核心的角色。因此，研究基本粒子质量的起源，就需要研究 Higgs 场的性质。

本文试图研究 Higgs 场与万有引力的相互作用，以期同时深化对电弱破缺机制和万有引力的理解。上面的讨论对两者的关联指出了一条初级的线索：既然引力作用于一切引力质量，而 Higgs 场关乎基本粒子（惯性）质量的起源，则根据等效原理，引力和 Higgs 场似应有某种密切的关系。当然，这样简单地对接经典物理与现代物理的概念只是相当粗糙初浅的暗示，远非成熟的思路，但它不失为将我们引向这一重要问题的良好动机。关键在于，即使聚焦到现代理论的具体问题中，也有许多原因驱使我们研究 Higgs 物理与引力的关联。试举如下。

^① 在下文不至引起歧义处，径以引力简称万有引力。

^② 因此，在选取适当的单位使得比例系数为 1 后，惯性质量与引力质量相等。

^③ 核子（如质子和中子）等复合粒子的质量大部分来源于强相互作用能，本文并不涉及。

第一种原因关乎 Higgs 玻色子的本性：Higgs 玻色子是标准模型中、也是到目前为止实验所发现的唯一标量粒子。因此，相对于其他基本粒子，它对引力作用更为“敏感”。这略含比喻的说法至少有下面两层意思：

其一，广义相对论中的等效原理来源于引力的最小耦合原则，即粒子通过其平直空间作用量的广义协变变化耦合到引力子。然而，从有效场论的观点看，广义相对论只是一个更一般的引力理论的领头阶。有效理论中超出广义相对论的高阶项一般会破坏等效原理。通过简单的穷举法可知，在所有自旋小于 2 的物质场中，只有标量场可与引力场有量纲为 4 的非最小耦合项，其余各种自旋的场与引力的非最小耦合项的量纲皆大于 4。我们将在以后各章讨论这个量纲为 4 的标量—引力非最小耦合项在粒子物理和宇宙学中所能产生的重要作用。

其二，Higgs 场作为标量场，敏感地依赖于电弱破缺能标之上的物理。概言之，标准模型 Higgs 场的质量项的量子修正，正比于紫外能标的平方。因此，标准模型之上更微观的新物理理论，需要解释 Higgs 场的质量如何被稳定在 10^2 GeV 的尺度。目前，已有很多新物理理论的候选者，如超对称、额外维、强耦合动力学，等等。在更高能标，还有大统一以及超弦理论。我们虽不能确定何者是描述自然的正确理论，但可以确定，更基本更完整的物理理论须包含万有引力。因而，对紫外物理敏感的 Higgs 场，可被用作引力效应的“探针”。

第二种原因是，我们目前尚未完全理解电弱对称性自发破缺的机制。可以确定的是，质量约为 125 GeV 的 Higgs 玻色子在此过程中扮演重要角色，但除了 Higgs 玻色子，是否还有其他新物理的作用，则仍然是开放的问题。已经提到的超对称、额外维、强耦合动力学等等新物理模型，目前仍然可被看作标准模型之外新物理的良好候选者。与此同时，引力在电弱尺度的物理过程中是否也起到作用，也是值得考虑的问题。在上述几类新物理模型中，我们已经见到了这样的例子。例如，在超对称理论中，电弱对称性的破缺可由超对称的破缺触发，而可见物质场中超对称的破缺，则可追溯到某种破坏超对称的隐区域（hidden sector）。将隐区域的超对称破缺传递到可见物质场，即可通过引力作用完成。这就是超对称理论中的引力传递机制（gravity mediation）。再如，额外维理论中，量子引力的尺度可相当靠近电弱破缺的尺度，因而可对电弱尺度的物理学产生重要影响。在本文第 3 章所介绍的两种现象学模型中，我们还将仔细研究量子引力与电弱对称性破缺发生直接关系的新机制。

第三种原因在于，我们仍没有完整的量子引力理论。广义相对论是目前为止描述引力作用最成功的经典理论，但由于它在微扰量子场论中不可重整，因而不易被直接量子化。大体上，处理量子引力的方法有两端，一是在有效场论的意义

下，将广义相对论视为引力理论的领头阶，并逐阶研究其修正，这被称为自下而上（bottom-up）的方法；二是直接构造紫外完备的量子理论，使广义相对论成为其经典极限，此即自上而下（top-down）的方法。在后者，已有的理论或模型包括超弦理论、正则量子引力、格点计算、时空不对称标度的 Hořava-Lifshitz 引力、以及渐进安全（asymptotic safety）的量子引力，等等。这些模型从不同侧面揭示了引力在紫外 / 高能区域可能展现的性质。另一方面，上文提到，Higgs 场是对紫外敏感的标量场，可作为探测紫外物理的“探针”，因而在各种量子引力模型中研究 Higgs 场，可为我们从理论和观测上寻找量子引力的效应提供重要线索。

如本文题目所示，本文的研究将从粒子物理学和暴胀宇宙学两个角度展开。在前者，我们将着眼于电弱对称性破缺的能区 $\mathcal{O}(0.1 \sim 10)\text{TeV}$ ，而在后者，我们将关注宇宙暴胀期间的 Higgs 场与引力效应，这发生在大约 10^{16}GeV 的能区。在本章的余下部分，我们简要介绍这些研究的背景与内容。

在电弱破缺尺度（即 TeV 能区），本文将仔细研究两类引力效应，分别对应于“自上而下”的量子引力模型和“自下而上”的有效场论。在自上而下的量子引力中，前文已提及数种不同的模型，各有不同的着眼点和方法，其物理图像在紫外也各异。然而，我们将特别关注一类普遍出现于各种量子引力模型中的新奇效应，称为时空维数自发缩减（spontaneous dimensional reduction, SDR），即时空维数在高能区由于量子引力的作用而减小。在渐进安全的量子引力、名为“因果性动力学三角剖分”（causal dynamical triangulation, CDT）的数值方法、以及 Hořava-Lifshitz 引力中，都显明地出现了 SDR 效应。另外，在正则量子引力和有限温弦论中，也有提示时空维数缩减的现象。最后，引力的全息原理，也可看作时空维数在紫外减小的一种体现。为刻画这种模型无关的普遍现象，并考察其在 TeV 尺度可能产生的效应，本文将建立一套包含 SDR 效应的电弱有效理论（3.1 节），其中，时空维数的缩减将完全体现在时空积分测度的标度变换性质上。我们将用这套有效理论研究弱规范玻色子的散射，并通过其分波振幅的幺正性分析，解释 SDR 如何通过时空维数的缩减，为弱规范玻色子提供质量，并描述在这种效应与标准模型的电弱破缺机制的共同作用下，弱规范玻色子散射中的新奇信号。

在“自下而上”的引力有效理论框架下，我们将重点关注引力场与标准模型物质场中唯一的量纲为 4 的非最小耦合项 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 的物理效应（3.2 节），其中 \mathcal{R} 是时空的标量曲率， H 是 Higgs 二重态。由于在标准模型与引力的有效作用量中加入此项并不破坏理论的原有对称性，因而这个量纲为 4 的项在有效理论中不可避免；又由于此项的系数 ξ 实则 Planck 质量 $M_P \simeq 2.4 \times 10^{18}\text{GeV}$ 与该有效理论紫外截断 Λ_ξ 的比， $\xi \simeq M_P/\Lambda_\xi$ ，因而 ξ 原则上可以很大。当 $\xi \sim \mathcal{O}(10^{15})$ 时，

$\Lambda_\xi \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$. 这意味着可以通过 TeV 尺度的对撞机实验探测或限制非最小耦合 ξ 的大小. 本文将仔细讨论此项在弱规范玻色子散射中的作用, 显明验证加入此项后的 Goldstone 等价定理, 并显式验证计算结果对 Jordan 系和 Einstein 系选取的独立性. 利用该结果, 本文将推导非最小耦合 ξ 的幺正性限制, 并分析紫外截断 $\Lambda_\xi \sim \mathcal{O}(10 \sim 100\text{TeV})$ 时, 此项对弱规范玻色子散射信号的影响.

在本文的第二部分 (第 4、5 章), 我们将系统探讨用 Higgs 场的真空能驱动宇宙暴胀的可能性. 根据暴胀宇宙学的慢滚模型, 宇宙在大爆炸之前的一段近指数的加速膨胀, 需要由某种标量场 (称为暴胀子) 的真空能驱动. 另一方面, Higgs 玻色子是目前实验发现的唯一基本标量粒子, 同时也是标准模型中唯一的标量场. 因而, 由 Higgs 场驱动的暴胀模型, 具有特别的重要性. 我们将于 4.2 节仔细说明, 标准模型的 Higgs 势并不适合驱动暴胀, 为构造成功的 Higgs 暴胀模型, 必须在高能改造之. 在标准的 Higgs 暴胀模型中, 对 Higgs 势在高能的改造是通过前已提及的量纲为 4 的有效算子 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 实现的. 这种改造的优点在于无需引入额外的新物理, 只需引力与标准模型的相互作用. 这同时带来一个额外的优点, 即在暴胀观测量与对撞机尺度的标准模型参数间建立了联系. 例如, 在树图理论中, 由 Higgs 玻色子的质量 $m_h \simeq 125\text{GeV}$ 可知 Higgs 场的自耦合常数 $\lambda \simeq 0.13$; 而通过宇宙微波背景的观测, 可知暴胀期间标量涨落的幅度. 在 Higgs 暴胀中, 此幅度正比于 λ/ξ^2 , 且比例系数已知. 由此, 即可确定 $\xi \sim 10^4$.

据前文, $\xi \sim 10^4$ 意味着理论的紫外截断 $\Lambda_\xi \simeq M_P/\xi \sim 10^{14}\text{GeV}$. 另一方面, 在暴胀期间, 宇宙的能量密度可大至 10^{16}GeV , 而暴胀场自身可大至 $\mathcal{O}(M_P)$. 这自然导致 Higgs 暴胀模型的幺正性疑难. 本文将通过定量分析说明 (4.3 节), 此处的量级估计在暴胀期间并不适用. 正确的做法, 须考虑 Higgs 背景场的影响. 为此, 本文将 3.2 节的分析推广至任意大小的 Higgs 背景场, 并给出暴胀期间的定量幺正性条件. 简言之, 此时的幺正性条件给出 $\Lambda_\xi \simeq M_P/\sqrt{\xi}$, 因而在 $\xi \gg 1$ 的情形下, 弱于 Higgs 真空的结果 $\Lambda_\xi \simeq M_P/\xi$, 从而澄清了文献中被大量讨论的 Higgs 暴胀的幺正性疑难.

随后, 我们将在 4.4 节解释, Higgs 暴胀的真正困难来自 Higgs 真空的稳定性问题. 因为, 根据目前 Higgs 质量与顶夸克质量的对撞机测量结果, 在大约 10^{16}GeV 以下, Higgs 自耦合常数 λ 的的 β 函数小于 0, 因而 λ 的自耦合常数随着重整化尺度的升高而减小. 根据两圈图结果, λ 在大约 10^{11}GeV 处减小至 0, 在更高的能量时成为负值. 这结果暗示, 标准模型的电弱破缺真空不稳定, 在更高的能量尺度, 还存在比 Higgs 期望值为 246GeV 的电弱破缺真空能量更低的真空. 这对于目前的宇宙也许不是严重的问题, 因为只要保证宇宙向能量更低的真空衰变所需的时间

间长于宇宙年龄即可（即所谓亚稳态）。然而，对于早期能量密度很高的宇宙而言， λ 在 10^{11}GeV 以上降至负值可有重要的后果（详见 4.4 节讨论）。特别地，这后果对于 Higgs 暴胀模型是致命的。

因而，Higgs 暴胀若能与目前的对撞机测量结果相容，几乎肯定需要新物理的协助^①。本文第 5 章将仔细介绍在新物理模型中实现 Higgs 暴胀的 3 类方式。在第一类模型中（5.1 节），我们考虑在标准模型中加入 TeV 质量的中性实标量粒子与矢量型夸克。它们与 Higgs 场的相互作用将显著改变 Higgs 自耦合常数的跑动行为，从而恢复 Higgs 真空的稳定性以及 Higgs 势在暴胀期间的正定性。与标准模型 Higgs 暴胀相比，这类模型的显著特点在于其“临界”参数空间，即 Higgs 自耦合 λ 与非最小耦合 ξ 都很小的区域，此区域可预言相当大的原初扰动的张标比，但同时需要很强的参数微调。这暗示此类模型应被嵌入更完整的理论中。

在第二类模型中（5.2 节），我们就考虑这样一种更完整的实现，即无标超引力大统一理论中的 Higgs 暴胀。选取此类模型基于两点考虑。其一，暴胀尺度恰与大统一尺度同量级，因而考虑大统一是自然的选择；其二，由于暴胀尺度接近 Planck 尺度，引力效应可十分关键，因而也需要考虑超引力效应。事实上，自 Higgs 暴胀模型被提出之后，一直有将其超对称化的尝试。但这些尝试或有暴胀轨道的稳定性困难，或过于人为，或失之繁琐。与之相比，本文将描述的模型无需特异的假设或复杂的理论结构，而是借助无标超引力，自然地实现以 Higgs 场驱动的暴胀。另外，此类模型并不严重依赖于大统一群的选取。事实上，本文将分别在 $SU(5)$ 、Flipped $SU(5)$ ，以及 Pati-Salam 模型等三种大统一群中显明地构造出 Higgs 暴胀的模型。

上述两类模型中，Higgs 势稳定性的改善本质上都源于新粒子与 Higgs 场的相互作用。在第三类模型中（5.3 节），我们考虑另一种可能性，即借助渐进安全的量子引力以改善 Higgs 势在高能的行为。在此模型中，我们假设物质场的耦合在紫外趋于高斯型固定点，因而 Higgs 自耦合常数、规范耦合常数与 Yukawa 耦合常数在高能皆趋于零。这将导致暴胀期间极为平坦的标量势，因而此类模型无需借助非最小耦合项 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 即可满足暴胀所需的慢滚条件。

本章最后介绍本文所使用各记号的约定。由于本文所涉论题较多，为所有变量安排符合传统、前后一贯且无冲突的记号殊为不易。因而，我们有时会依上下文变更对同一物理量的记号，或者同一记号用于不同的物理量。在结合上下文阅读时，应不致出现歧义。

本文使用自然单位，即光速 $c = 1$ ，Planck 常量 $\hbar = 1$ ；当不加说明地使

^①至于一般的暴胀模型，标准模型 Higgs 真空能在暴胀期间为负是否一定意味着新物理的存在，仍无确定的答案。参见 4.4 节讨论与参考文献。

用“量纲”时，皆指能量量纲。在 2.4.1 小节、4.1.2 小节，以及 5.2 节，取 Planck 质量 $M_P \equiv (8\pi G)^{-1/2} = 1$ ，其中 G 是 Newton 引力常量。除非特别说明，本文对各类指标皆使用重复指标自动求和的 Einstein 求和约定。指标的对称化按 $A_{(i}B_{j)} \equiv \frac{1}{2}(A_iB_j + A_jB_i)$ 定义。

自始至终，我们使用时正空负的度规，因而 $(3+1)$ 维的 Minkowski 度规可取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ 。与一般的时空度规 $g_{\mu\nu}$ 相适配的协变导数用 ∇_μ 标记，内部规范对称性的协变导数用 D_μ 标记，零曲率超空间中的协变导数以 \mathcal{D}_α 标记，而含有非零曲率超空间的协变导数以 \mathcal{D}_α 标记。

在涉及超场的部分，本文将以 * 代表复共轭、以 † 代表 Hermite 共轭。自始至终，对于超场而言，上划线 (bar) 都不代表复共轭，例如， \bar{H} 不是 H 的复共轭。

在第 2、3、4 三章，Higgs 二重态场 H 的各分量记为 $H = (\pi^+, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\phi} + \phi + i\pi^0))^T$ ，其中 $\bar{\phi}$ 是 H 的背景值。在电弱真空， $\bar{\phi} \equiv v \simeq 246\text{GeV}$ 。这里不使用 h 、而是用 ϕ 标记 CP 为正的中性分量，是为了避免与时空度规的微扰 $h_{\mu\nu}$ 相混淆。然而在第 5 章中并无此混淆的可能，因而我们在第 5 章将改用 h 标记 Higgs 玻色子。

第2章 电弱与引力相互作用理论简介

本文的主题是 Higgs 同引力的相互作用，因而同时涉及电弱相互作用理论与引力理论。本章将择要介绍这些理论的基础内容，为下文作必要的准备。

在 2.1 节，我们简要介绍电弱对称性的自发破缺及其场论实现，包括规范对称性自发破缺的 Goldstone 玻色子等价定理、其在场论中的非线性实现、标准模型的 Brout-Englert-Higgs 机制。我们在 2.2 节介绍广义相对论的经典作用量及其微扰展开、ADM 分解，以及标架—自旋联络表示。2.3 节简要介绍整体超对称与大统一理论的基本内容，而 2.4 节则介绍超引力与其他量子引力模型，并重点关注时空维数自发缩减的量子引力效应在这些模型中的体现。由于所涉及理论范围较宽，因而本章不拟对各理论作全面描述，而只是概述与本文研究关系密切的部分。

2.1 电弱对称性破缺与 BEH 机制

对称性的概念在物理学中具有核心的重要性。具体到量子场论，对称性在粒子态空间的实现方式，按真空态的对称性变换行为分为两种。在第一种方式中，真空态在对称变换下保持不变，而诸粒子态构成对称群的线性表示，这称为对称性的线性实现，或 Wigner-Weyl 实现。在第二种方式中，存在有一系列简并的真空态，通过对称性变换联系在一起，因而诸粒子态不再构成完整对称群的线性表示，这称为对称性的非线性实现，或 Nambu-Goldstone 实现。在整体 (global) 连续对称性非线性实现的情形，粒子谱中存在零质量的 Goldstone 玻色子；而在局域 (local) 连续对称性非线性实现中，粒子谱中没有零质量 Goldstone 粒子，而代之以有质量的规范玻色子。

自然界中已知的四种基本相互作用，皆可用规范理论，即包含局域连续对称性的理论描写（虽然描写引力的理论较为特殊）。其中，强相互作用具有线性实现的 $SU(3)_c$ 对称性，而电弱相互作用具有非线性实现的 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 对称性。在后者， $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的一个子群 $U(1)_{\text{em}}$ 仍被线性实现，即对应于电磁相互作用，因而其规范玻色子，即光子，仍是无质量的玻色子，而其余 3 个被非线性实现的方向，对应于有质量的弱规范玻色子 W^\pm 和 Z^0 。按照习用的术语，非线性实现的对称性常被称为对称性的自发破缺，下文亦从之，虽然这种术语容易造成误导，因为对称性实际上并没有被破缺。

有质量的矢量玻色子有三个独立的极化方向。在其静止的参考系中，它们可

被取为3维空间中3个相互正交的方向。与此相对，无质量矢量玻色子必以光速运动，只有两个独立的横向极化。这意味着，将有质量的矢量玻色子加速到近光速运行，其速度趋于光速的极限，并不简单地对应于无质量的矢量玻色子，因为这将造成物理自由度的丢失。事实上，在速度趋于光速的极限下，有质量玻色子的横向极化即类似于相应的无质量粒子，而其纵向极化将自成一个新的标量自由度。在一定意义上，此标量自由度就是相应的整体对称性破缺理论中的Goldstone粒子。

构造规范对称性自发破缺的一种常见方式是，从其相应的整体对称性理论出发，将其中的整体对称性局域化或曰“规范化”。在此过程中，可以看到，无质量的规范粒子将“吃掉”无质量的Goldstone粒子，而成为有质量的矢量玻色子。这里的“吃掉”固然带有比喻的性质，但此直观的图像，却可以严格化，严格化的结果就是著名的Goldstone玻色子等价定理(Goldstone boson equivalence theorem) [1–8]。简言之，设散射振幅 $\mathbf{T}_L(k_1, \dots, k_n; \dots)$ 中包含动量分别为 k_1, \dots, k_n 的 n 个纵向极化的、质量为 M 的矢量玻色子外线，而散射振幅 $\mathbf{T}_\pi(k_1, \dots, k_n; \dots)$ 是将 $\mathbf{T}_L(k_1, \dots, k_n; \dots)$ 中的纵向玻色子全部替换为相应的Goldstone玻色子所得的结果，则Goldstone玻色子等价定理断言，在 $k \gg M$ 的极限下，

$$\mathbf{T}_\pi(k_1, \dots, k_n; \dots) = (-i)^n \mathbf{T}_L(k_1, \dots, k_n; \dots) + \mathcal{O}(M/k^0). \quad (2.1)$$

此处^①简要回顾Goldstone玻色子等价定理的简单证明[3]，更一般的证明可见[4, 5]，详细介绍可见[9]。首先，在动量空间中，质量为 M 的规范场 $A_\mu(k)$ 的纵向极化分量为 $A_L(k) = \epsilon_L^\mu A_\mu(k) = k^\mu A_\mu/M + \mathcal{O}(M/k^0)$ ，其中，纵向极化矢量 $\epsilon_L^\mu(k)$ 为，

$$\epsilon_L^\mu = \frac{1}{M}(|\vec{k}|, k^0 \vec{k}/|\vec{k}|) = \frac{k^\mu}{M} + v^\mu(k), \quad v^\mu(k) = \mathcal{O}(M/k^0). \quad (2.2)$$

其次，规范理论中连通Green函数的生成泛函 \mathcal{W} 可表为，

$$e^{i\mathcal{W}[J_L]} = \int [dA_\mu d\pi] \delta(\partial^\mu A_\mu - M\pi) \exp \left(iS_{\text{qu}}[A_\mu, \pi, \dots] + i \int d^4x J_L A_L \right), \quad (2.3)$$

其中 J_L 是纵向极化玻色子的源，而 S_{qu} 是包括Faddeev-Popov鬼项的量子化作用量， $\delta(\partial^\mu A_\mu - M\pi)$ 是't Hooft-Feynman规范下的规范固定条件。上式省去了其他外线粒子对应的源项。在动量空间中，以上规范固定条件成为 $-i(k^\mu A_\mu - iM\pi) = -iM[A_L - i\pi + \mathcal{O}(M/k^0)]$ 。因而，在相差 $\mathcal{O}(M/k^0)$ 的精度下，可将以上生成泛函中的纵向极化玻色子场 A_L 替换为Goldstone场 $i\pi$ ，从而此替换也适用于Green函数。这就证明了Goldstone玻色子等价定理。值得注意的是，此证明不依赖作用量的具体形式。

^①为清晰起见，本段的表达式皆略去规范指标。

体形式，亦即不依赖于具体的场论模型，而仅假设规范对称性和't Hooft-Feynman 规范固定条件，因而具有相当的普遍性。在本文第3章中，我们将显式验证，即使在包含进引力与 Goldstone 场的非最小耦合之后，Goldstone 玻色子等价定理仍成立。

另一方面，我们希望构造有质量规范玻色子的场论模型，亦即规范对称性非线性实现的场论模型。这并不如线性实现的情形直接，因为此时粒子态并不完全构成对称群的线性表示，相应的场算子亦然。构造整体内部对称性非线性实现的一般方法，来自 [10, 11] 的奠基性工作，常称为陪集构造 (coset construction)。这种方法的出发点，在于 Goldstone 玻色子的规范变换类似平移变换， $\pi(x)^a \rightarrow \pi^a(x) + \epsilon^a + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ ，此处 ϵ^a 是无穷小规范变换参数，指标 a 标记破缺的对称性生成元 T^a 。因而，Goldstone 场 $\pi^a(x)$ 可被认作规范群中被破缺部分（陪集）的坐标，亦即规范变换的参数。现在，由于对称变换的参数 $\pi^a(x)$ 依赖于时空坐标 x^μ ，因而被破缺的全局对称性成为局域的对称性。于是，在对称变换下不变的拉格朗日量可通过场量的协变导数构造，而协变导数所需的联络场，来自对称群的 Maurer-Cartan 形式的未破缺分量，它可表为 Goldstone 场的函数。特别地，Goldstone 场 π^a 的拉格朗日量 \mathcal{L}_π 在此构造下，只依赖于 π^a 的协变导数^①。因而，将 \mathcal{L}_π 按能量量纲展开，一般有如下的形式，

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^a)^2 + \frac{c_1}{f_\pi^2}(\pi^a)^2 (\partial_\mu \pi^b)^2 + \frac{c_2}{f_\pi^2}(\pi^a \partial_\mu \pi^a)^2 + \dots, \quad (2.4)$$

其中 c_1 与 c_2 是无量纲的系数， f_π 是量纲为 1 的能量尺度。由此可见，Goldstone 场最低阶的相互作用项量纲为 6。其后果是，使用这些相互作用项计算出的 Goldstone 玻色子散射的树图振幅，在散射能量 $E \gg \Lambda_\pi$ 时将破坏微扰幺正性（详见 3.1 节）。这意味着，以上场论模型在 $E \gtrsim \Lambda_\pi$ 时，或者有新的弱耦合物理自由度的加入，或者该理论变成强耦合的理论。

将陪集构造的方法推广到内部规范对称性自发破缺的情形是直接的，这只需将包含 Goldstone 场的偏导数 $\partial_\mu e^{i\pi/f_\pi}$ 替换为包含规范场 A_μ 的协变导数 $D_\mu e^{i\pi/f_\pi} = \partial_\mu e^{i\pi/f_\pi} + ig[A_\mu, e^{i\pi/f_\pi}]$ 即可，其中 g 是规范耦合常数， $\pi \equiv \pi^a T^a$ 。此时，可选取幺正规范 (unitary gauge)，即通过规范变换将 π^a 变为 0 (π^a 的规范变换近似于平移变换，因而这在局部总可以做到)，从而 $\pi^a(x)$ 的动能项 $\frac{1}{2}|D_\mu e^{i\pi/f_\pi}|^2$ 即退化为规范场的质量项 $\frac{1}{2}g^2 f_\pi^2 A_\mu^2$ 。

由以上讨论可知，电弱对称性非线性实现的理论，如果在 $E \gg \Lambda_\pi$ 时还能用

^①由此构造的规范不变的拉格朗日量仍不是最普遍的情形，因为作用量的规范不变性只要求拉格朗日量在相差全微商的意义下规范不变。可以证明 [12]，在相对论性理论中，拉格朗日量中在相差全微商的意义下规范不变的项只有 Wess-Zumino-Witten 项 [13, 14]。

微扰的量子场论予以描述，则除有质量的规范场以外，需要引入新的自由度。用常见的术语说，就是电弱对称性的破缺需要一种机制。

最简单的电弱破缺机制，或许就是粒子物理标准模型^[15–18]所采用的 *Brout-Englert-Higgs* 机制（简称 BEH 机制）^[19–24]，其核心在于引入了 Higgs 场 H ，它是 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的 $(\mathbf{2}, \frac{1}{2})$ 表示^①，且具有如下 Landau-Ginzberg 形式的标量势，

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (2.5)$$

其中 μ 具有能量的量纲，而 Higgs 自耦合常数 λ 量纲为 0。这里二次项的符号为负，导致 H 获得非零的真空值 $\langle H \rangle = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}v)^T$ ，其中 $v \simeq 246\text{GeV}$ 。我们将 H 参数化为，

$$H = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi + i\pi^0) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

其中 (π^\pm, π^0) 即对应于 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 中破缺对称性的 Goldstone 场。在此模型的拉格朗日量中，Higgs 场的动能项给出规范场的质量项。可见，为了在高能区 ($E \gg v$) 将 Goldstone 散射振幅（或等价地，纵向规范玻色子散射振幅）“么正化”，标准模型引入了一个额外的 Higgs 玻色子。我们将在 3.1 节解释其细节，这里仅指出，2012 年在大型强子对撞机（LHC）上发现的质量约 125GeV 的标量粒子^[25,26]，到目前为止，在实验精度内与标准模型对 Higgs 玻色子的预言皆吻合。特别是测量到其与 W^\pm 和 Z^0 粒子的耦合，说明此粒子在电弱对称破缺中扮演重要角色。至于它是否就是标准模型的 Higgs 玻色子，还需实验的进一步测量和检验。特别地，若要确证它与标准模型费米子（特别是前两代）间的 Yukawa 与标准模型相同^[27,28]，则需要质心系能量在 50-100TeV 的未来质子-质子对撞机。

因而，关于电弱对称破缺的机制，以及电弱尺度的新物理，在标准模型之外仍有许多可能性。目前我们已有不胜计数的新物理模型，作为超越标准模型的候选者。粗略言之，这些模型大致有三类，其一是包含或类似超对称的理论，其二是动力学破缺电弱对称性的理论，其三是包含额外时空维数的理论。关于第一类，我们将在 2.3 节简要介绍。第二类与第三类中的一些模型可通过引力-规范对偶联系起来。额外维理论通常意味着 TeV 尺度的量子引力效应。这将是我们在 3.1 节考虑 TeV 尺度的量子引力的动机之一。

更精确地测量 Higgs 与各标准模型粒子的耦合，其意义绝不仅限于使我们的知识增加几位有效数字。实际上，寻找这些参数对标准模型可能的偏离，是我们寻找超越标准模型的新物理的重要窗口。我们已有很多来自理论和观测的迹象甚至

^① 这里采用 $Q = T_3 + Y$ 的约定，其中 Q 是电荷， T_3 是 $SU(2)_L$ 的 3 分量， Y 是 $U(1)_Y$ 超荷。

证据，表明标准模型不会是描述自然界的最终理论。其中，标准模型所无法解释或没有包括的已知实验与观测事实有，中微子质量、暗物质、正反物质不对称性、宇宙暴胀^①，以及最重要的万有引力相互作用。另外，目前所知的 Higgs 质量与顶夸克质量提示，目前宇宙所在的电弱破缺的 Higgs 真空很可能是不稳定的，这也强烈地暗示新物理的存在。我们将在第 4 章详细讨论这一问题。

2.2 广义相对论与引力的有效场论

广义相对论是万有引力的动力学理论，它的核心在于由等效原理而来的广义协变性，以及由光速不变原理而来的局域 Lorentz 对称性。前者断言，物理规律与参考系的选取无关，因此可被进一步抽象为物理规律的对时空坐标的重参数化不变性（reparameterization invariance）^②。从而，广义相对论也是一种关于时空几何的动力学理论，其动力学自由度包含于时空的度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 中。因此，本文在不至引起歧义时，将根据上下文混用度规和引力场两个术语。

经典作用量 在任意的坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ 下，度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 依二阶协变张量的方式变换，

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (2.7)$$

广义相对论可被视为一种规范理论，其规范变换包含广义坐标变换。因此，引力理论的作用量应该是广义坐标变换的不变量。我们可以依能量量纲递增的顺序写出满足条件的各项。量纲为 0 的项只有一个，即宇宙学项 S_Λ ，

$$S_\Lambda = -M_p^2 \Lambda \int d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.8)$$

其中 $M_p = (8\pi G)^{-1/2} \simeq 2.4 \times 10^{18} \text{GeV}$ 是（约化的）Planck 质量， G 是 Newton 引力常数， Λ 即宇宙学常数，而 $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ 。量纲为 2 的项也是唯一的，即著名的 Einstein-Hilbert 作用量：

$$S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad (2.9)$$

其中 Ricci 标量 $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ ，Ricci 张量 $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ ，而曲率张量 $\mathcal{R}^\lambda_{\kappa\mu\nu}$ 通过仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$ 定义为：

$$\mathcal{R}^\lambda_{\kappa\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\kappa\mu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\kappa\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\kappa\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\kappa\nu}. \quad (2.10)$$

^①严格地说，宇宙暴胀并不是观测事实，但与目前所观测到的原初扰动高度相容。Higgs 暴胀模型^[29]是在标准模型的框架内实现暴胀的尝试，然而，我们将在第 4、5 两章详细解释，成功的 Higgs 暴胀很可能需要超越标准模型的新物理。

^②值得指出的是，时空坐标的重参数化不变性不是等效原理的逻辑推论。事实上，可以构造出满足等效原理的“标量”引力理论，其中并无时空坐标的重参数化不变性。可参见^[30]的相关讨论。

另一方面，在广义相对论中，物质场与引力场的相互作用遵从最小耦合（minimal coupling）原则。对于玻色场，这相当于将平直空间中物质场作用量 S_{matter} 中所有的 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 换成一般的度规场 $g_{\mu\nu}(x)$ ，将时空积分测度 d^4x 换成广义坐标变换不变的形式 $d^4x\sqrt{-g}$ ，同时将所有的偏导数 ∂_μ 换成协变导数 ∇_μ ，此协变导数通过仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 而定义，对于一般的张量场 $T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots}$ ，其协变导数为，

$$\nabla_\mu T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots} = \partial_\mu T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho T^{\lambda\cdots}_{\sigma\cdots} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda T^{\rho\cdots}_{\lambda\cdots} + \cdots. \quad (2.11)$$

经过这样的替换，物质场即通过能动张量 $T_{\mu\nu}$ 耦合到引力场，这里的能动张量 $T_{\mu\nu}$ 定义为^①，

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.12)$$

例如，对于具有作用量 $S = \int d^4x \sqrt{-g} [\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi)]$ 的标量场 ϕ ，它的能动张量为，

$$T_{\mu\nu}[\phi] = (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi)^2 + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (2.13)$$

物质场通过其能动张量耦合到引力场这一事实，可导致等效原理。概言之，在低能、低速的 Newton 极限下，度规场的 00 分量退化为 Newton 引力势；而能动张量的 00 分量即为物质场的能量密度，在 Newton 极限下退化为惯性质量密度。由此可见，物质场所感受到引力作用的强度（即引力质量）正比于其惯性质量，此即等效原理的原始形式。

最后，广义相对论中的场方程可通过将作用量 $S_{\text{GR}} \equiv S_{\Lambda} + S_{\text{EH}} + S_{\text{matter}}$ 对度规 $g^{\mu\nu}$ 变分而得，即 $\delta S_{\text{GR}}/\delta g^{\mu\nu} = 0$ ，其结果为，

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = -M_p^{-2}T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

此即带有宇宙学常数的 Einstein 场方程。

广义相对论的微扰论 现在我们简要介绍广义相对论的微扰论。考虑平直空间背景上的微小涨落， $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ ，其中 $\kappa \equiv \sqrt{2}M_p^{-1}$ 。则展开 Einstein-Hilbert 作用量 S_{EH} 至涨落 $h_{\mu\nu}$ 的二次项，可得如下线性化的作用量，

$$S_{\text{EH}}^{(\ell)} = \frac{1}{4} \int d^4x \left(h\partial^2 h - h^{\mu\nu}\partial^2 h_{\mu\nu} + 2h_{\mu\lambda}\partial^\mu\partial_\nu h^{\nu\lambda} - 2h\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} \right), \quad (2.15)$$

其中 $h \equiv h_{\mu}^{\mu}$ ，指标由平直度规 $\eta_{\mu\nu}$ 升降。易见，此作用量在如下线性化的广义坐标变换 $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$ 下保持不变，其中 ξ_μ 是任意的规范变换参数。因此，

^① 在与文献中的其它约定作比较时，须注意， $\delta/\delta g^{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}(\delta/\delta g_{\rho\sigma})$ 。

当我们对这个线性化的经典理论量子化时，可利用其规范自由度，在量子化的作用量中引入如下规范固定项，

$$S_{\text{GF}} = \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h)^2, \quad (2.16)$$

从而 $S_{\text{EH}}^{(\ell)} + S_{\text{GF}}$ 中扰动场 $h_{\mu\nu}$ 的动能项可逆，其逆在动量空间中即为扰动场的 Feynman 传播子，

$$G_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(h)}(p) = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[2\eta_{\mu(\rho}\eta_{\sigma)\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - (1-\alpha) \frac{4p_{(\mu}\eta_{\nu)(\rho}p_{\sigma)}}{p^2} \right]. \quad (2.17)$$

时空的 ADM 分解 在4.1节关于暴胀的讨论中，我们要用到广义相对论的 Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 形式^[31]，此处简要介绍之。更多细节可参考 [32]。ADM 形式的基本想法是将时空按等时面切片。这样做的主要目的是用 Hamilton 形式重新表述广义相对论。由于 Hamilton 形式需要选出一个特别的时间方向，因此这种方法失去了显明的广义协变性。然而，在处理一些特别的问题时，这种分解仍然是方便的。

在这种分解下，我们写出时空度规 $g_{\mu\nu}$ 如下，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = N^2 dt^2 - \hat{g}_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j), \quad (2.18)$$

其中 N 称为间函数 (lapse function)， N^i 称为移矢量 (shift vector)，而 \hat{g}_{ij} 代表 3 维等时面的度规。度规 $g_{\mu\nu}$ 及其逆 $g^{\mu\nu}$ 亦可表为如下矩阵形式，

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 - N_k N^k & -N_j \\ -N_i & -\hat{g}_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/N^2 & -N^j/N^2 \\ -N^i/N^2 & N^i N^j/N^2 - \hat{g}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

其中空间指标 i, j, k 用 \hat{g}_{ij} 及其逆 \hat{g}^{ij} 升降。于是，4 维时空的标量曲率 \mathcal{R} 可用 3 维几何量表出如下，

$$\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{R}}^{(3)} - (K_\mu{}^\mu)^2 + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu(-Kn^\mu + \nu^\nu \nabla_\nu n^\mu), \quad (2.20)$$

其中， $\widehat{\mathcal{R}}^{(3)}$ 是由空间度规 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 构造的 3 维曲率标量， $K_{\mu\nu} = (\eta_\mu^\lambda + n^\lambda n_\mu)\nabla_\lambda n_\nu$ 是 3 维等时面的外曲率， $K = K_\mu{}^\mu$ ，而 $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$ 是等时面的单位法向量。外曲率亦可由三维量表出为 $K^{00} = K^{0i} = 0$ ， $K_{ij} = \frac{1}{2}N^{-1}(\partial_t h_{ij} - \widehat{\nabla}_i^{(3)} N_j - \widehat{\nabla}_j^{(3)} N_i)$ ，其中 $\widehat{\nabla}_i^{(3)}$ 是与 3 维度规 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 适配的协变微商。

标架—自旋联络表示 将引力耦合到旋量，需要特别的处理，因为旋量的定义依赖于平空间的 Lorentz 群的旋量表示，它在广义相对论的广义坐标变换下没有直接的对应。因而，为引入旋量与引力场的耦合，最直接的办法是在每个时空点上逐点选取局部的正交归一坐标系，根据等效原理，这总是可以做到的。设此正交归一的坐标 1 形式为 $e^m(x)$ ，其中 $m = 0, \dots, 3$ 是局域 Lorentz 指标，则对于标量场 ϕ ，其作用量可写为，

$$S_\phi = \int e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \left[\frac{1}{2} \eta^{mn} \partial_m \phi(x) \partial_n \phi(x) - V(\phi) \right]. \quad (2.21)$$

现在，可以将 $\{e^m(x)\}$ 按坐标 1 形式 $\{dx^\mu\}$ 展开为 $e^m(x) = e_\mu^m(x) dx^\mu$ ，其中 $e_\mu^m(x)$ 称为标架场（4 维时称为 vierbein，在一般维数时为 vielbein）。则由 $ds^2 = \eta_{mn} e^m e^n = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ，可知 $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n$ ，于是以上作用量可重新表为，

$$\begin{aligned} S_\phi &= \int d^4x \det e_\mu^m \left[\frac{1}{2} \eta^{mn} e_m^\mu e_n^\nu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

即退化到熟知的形式。现在，将此方法应用于自旋 1/2 的 Dirac 旋量场 ψ 。注意到，正交归一基 $e^m(x)$ 逐点而变，这导致相应的 Lorentz 对称性亦被局域化，因而旋量场的偏微商 $\partial_m \psi$ 须换为协变微商 $\nabla_m \psi \equiv \partial_m \psi + \frac{1}{4} i \omega_m^{np} [\gamma_n, \gamma_p] \psi$ ，其中 γ^m 是 (3+1) 维平空间的 γ 矩阵，而 ω_m^{np} 对应于局域 Lorentz 对称性的联络，称为自旋联络（spin connection）。于是，可写出质量为 m 的自由 Dirac 旋量场 ψ 的作用量如下，

$$S_\psi = \int d^4x \det e_\mu^p \left(\bar{\psi} \gamma^n \nabla_n \psi - m \bar{\psi} \psi \right). \quad (2.23)$$

另外，可将曲率 $\mathcal{R}_{\kappa\mu\nu}^\lambda$ 用标架 e_μ^m 和自旋联络 ω_m^{np} 表出。在只含玻色型张量场的理论中，自旋联络 ω_m^{np} 的运动方程是代数方程，因而 ω_m^{np} 可用标架场表出；在包含旋量场的理论中，旋量将贡献非零的挠率，而自旋联络亦将依赖于旋量场，这在作用量中导致旋量场的 4-Fermi 型相互作用。关于标架—自旋联络方法的更多介绍，可见 [33, 34]。

引力场的有效理论 上文提到，广义相对论中引力场部分的作用量由量纲为 0 的宇宙学项 (2.8) 和量纲为 2 的 Einstein-Hilbert 项 (2.9) 构成。然而，从有效场论的观点看，这只是满足广义协变性的一般作用量的头两阶。更一般地，我们可以考虑协变导数 ∇_μ 与曲率张量 $\mathcal{R}_{\kappa\mu\nu}^\lambda$ 的指标完全收缩的任意乘积。显然，在作用量中引入这些标量仍然保持广义协变性。当然，由于 ∇_μ 量纲为 1 而曲率 \mathcal{R} 量纲为 2，

这些广义相对论之外的项量纲都大于 2. 例如, 在量纲为 4 的水平, 我们有,

$$S_{\text{grav.}}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} (a_1 \mathcal{R}^2 + a_2 \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}), \quad (2.24)$$

其中 a_1 与 a_2 是无量纲的系数. 这里略去了全微商项 $\nabla^\mu \nabla_\mu \mathcal{R}$. 另外, $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在相差全微商项的意义下可由以上两项线性表出, 因而并不独立. 与此类似, 可以继续写出更高阶的项. 一般而言, 这些高阶项不仅会修改引力场的相互作用, 同时会引入新的自由度, 而且新的自由度中有可能包含鬼场 (ghost field), 即动能项有额外的负号^①. 然而, 可以证明, 如果引力有效理论的作用量是标量曲率 \mathcal{R} 的多项式 $f(\mathcal{R})$, 则该理论没有鬼场自由度. 相应的有效理论被称为 $f(\mathcal{R})$ 理论. 特别地, 只包含 \mathcal{R} 与 \mathcal{R}^2 两项的有效理论中, 除了自旋为 2 的引力子外, 还有一标量自由度, 它被用于驱动早期宇宙的暴胀, 此即宇宙暴胀的 Starobinsky 模型 [35].

在引力的有效场论中加入物质场时, 可依广义协变性与物质场理论的对称性, 逐阶写出有效理论作用量中的各项. 一般而言, 这些项并不遵从上文所述的最小耦合原则. 但是, 如果我们只考虑有效理论的低能极限, 即略去所有量纲大于 4 的项, 则对于旋量场和矢量场, 剩下的量纲不大于 4 的项皆符合最小耦合原则, 亦即, 它们皆可从平空间的作用量, 通过前文提到的替换 $(\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu)$ 而得. 唯一的例外是标量场 ϕ . 在有效理论中量纲不大于 4 的项中, 有唯一的非最小耦合项 (non-minimal coupling term),

$$S_{\text{NMC}}^{(4)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \xi \mathcal{R} \phi^2, \quad (2.25)$$

其中 ξ 是无量纲的耦合常数. 根据前文讨论, 等效原理是最小耦合原则的必然结果; 同时, 我们在此看到, 最小耦合原则又来源于广义协变的引力有效理论的低能极限. 由此可知, 等效原理实为满足广义协变性的一般有效场论在低能的必然结果. 唯一可能的例外是标量场与引力的非最小耦合项 (2.25). 我们将在以下各章仔细研究此项的物理后果.

2.3 超越标准模型: 超对称与大统一

2.3.1 整体超对称与最小超对称标准模型

在 $3+1$ 维的相对论性、且存在 S 矩阵的相互作用场论中, 玻色型 (bosonic) 守恒量, 即对称性 Lie 代数的生成元, 可根据其 Lorentz 变换的性质分为不相交的两类: 时空对称性和内部对称性. 前者只有动量 P^μ 和角动量 $J^{\mu\nu}$ (在无质量理论

^① 包含鬼场的理论在微扰论的意义下不自洽, 它提示微扰展开的背景不是场方程的稳定解.

中还可能有共形对称性的生成元), 后者包括所有的内部对称性的生成元. 这两类生成元互相对易. 换言之, 除了动量和角动量, 对称性的生成元不能携带 Lorentz 指标^①. 此即著名的 Coleman-Mandula 定理 [36, 37].

与此同时, 还可考虑费米型的守恒量, 按照自旋一统计关系, 这样的守恒量应携带旋量指标, 相应的对称性应由包含反对易子 (anticommutator) 的超代数 (super-algebra) 描写, 称为超对称 (supersymmetry). 超对称是时空对称性的扩展, 其生成元 Q 是 Lorentz 旋量, 因而并不与 $J^{\mu\nu}$ 对易.

于是, 超对称将玻色子变为费米子, 将费米子变为玻色子. 容易证明, 在单粒子态的空间中, 一个超对称的表示 (称为超多重态, super-multiplet) 中必有等量的玻色子态与费米子态, 且其质量相同. 在标准模型的超对称扩展中, 用到了两种超多重态, 即手征 (chiral) 超多重态和矢量超多重态. 前者包含两个自旋 0 的粒子态和一对自旋 1/2 的粒子态, 而后者包含一对自旋 1/2 的无质量粒子态和一对自旋 1 的无质量粒子态.

整体超对称理论的一般形式 3+1 维 $\mathcal{N}=1$ 的整体超对称理论可用超空间方法简洁地描述. 超空间方法的出发点在于, 时空本身可看作 Poincaré 群模去 Lorentz 群的陪集, 因而可将其推广为超空间, 即超 Poincaré 群 (即 Poincaré 群的超对称扩展) 模去 Lorentz 群的陪集. 注意到, 超对称生成元 Q 可被分为一对左手和右手的 Weyl 旋量, 因此超空间的坐标包含时空坐标 x^μ , 以及一对 Weyl 旋量坐标^② $(\theta^\alpha, \bar{\theta}_\dot{\alpha})$. 于是, 超空间中的场 (超场, superfield) 即有形式 $F(x, \theta, \bar{\theta})$, 且可按旋量坐标 $(\theta, \bar{\theta})$ 展开为分量. 以下简要讨论超对称标准模型所要用到的两种超场, 即手征超场和矢量超场.

对应于手征超多重态的超场, 即手征超场 Φ . 它是满足条件 $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi=0$ 的超空间的标量. 这里 $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}=-\partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}-i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu$ 是超空间的反手征 (anti-chiral) 协变导数, $\sigma^\mu=(1, \tau^i)$, τ^i 是 Pauli 矩阵. 按旋量坐标展开后, 手征超场 Φ 具有如下一般的展开形式,

$$\Phi=\phi(y)+\sqrt{2}\theta\chi(y)+\theta^2F(y), \quad y^\mu\equiv x^\mu+i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \quad (2.26)$$

其中 $\phi(x)$ 为标量场, $\chi(x)$ 为左手 Weyl 旋量. 而 $F(x)$ 为标量辅场 (auxiliary field), 它没有动能项, 其作用在于保持离壳 (off-shell) 的超对称性. 给定一组手征超场 Φ^I (及其复共轭 $\Phi^{\dagger I}$), 其一般的拉格朗日量可由两个函数 \mathcal{K} 和 \mathcal{W} 指定如下,

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathcal{K}}+\mathcal{L}_{\mathcal{W}}=\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger)+2\text{Re} \int d^2\theta \mathcal{W}(\Phi), \quad (2.27)$$

^①除去诸如 $\partial_\mu K$ 之类的平庸的情形, 这里 K 是内部对称性的生成元.

^②本节记号与约定同 [38], 除了时空度规仍取时正空负的约定, 即 $(+, -, -, -)$. 亦可参见 [39].

其中 \mathcal{K} 称为 Kähler 势，它是 Φ^I 和 $\Phi^{†I}$ 的不含导数的任意函数，而 $\mathcal{W}(\Phi)$ 称为超势 (superpotential)，它是 Φ^I 的（不含导数的）任意函数，但不包含其复共轭 $\Phi^{†I}$. 完成旋量空间的积分，并通过运动方程消去辅场 F^I ，所得拉格朗日量只依赖标量 ϕ 和旋量 χ . 在本文中，我们将使用其中仅包含标量的部分 \mathcal{L}_ϕ ，

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{K}_{IJ^*}(\partial_\mu \phi^I)(\partial^\mu \phi^{*J}) - V_F(\phi), \quad (2.28)$$

其中， $\mathcal{K}_{IJ^*}(\phi, \phi^*) \equiv \partial^2 \mathcal{K}(\phi, \phi^*) / \partial \phi^I \partial \phi^{*J}$ 称为 Kähler 度规，它在 Kähler 变换 $\mathcal{K}(\phi, \phi^*) \rightarrow \mathcal{K}(\phi, \phi^*) + f(\phi) + \bar{f}^\dagger(\phi^*)$ 下保持不变，其中 $f(\phi)$ 是 ϕ^I 的任意全纯函数. 因而，以标量场 ϕ^I 为坐标的空间成为 Kähler 流形 [40]. 以上拉格朗日量 (2.28) 中的标量势 V_F 为，

$$V_F = \mathcal{K}^{IJ^*} \frac{\partial \mathcal{W}(\phi)}{\partial \phi^I} \frac{\partial \mathcal{W}^\dagger(\phi^*)}{\partial \phi^{*J}}, \quad (2.29)$$

其中 \mathcal{K}^{IJ^*} 是 Kähler 度规的逆. 此项由拉格朗日量中包含辅场 F 的项贡献，因而称为 F 项. 在整体超对称理论中，此项是正定的.

超势 \mathcal{W} 中量纲大于 3 的项是表现不可重整的. 然而，在超对称理论中，有重要的无重整定理 (nonrenormalization theorem)，它断言超势 \mathcal{W} 不接受量子修正. 由于超对称的这一良好性质，在超势中加入高阶项无需担心紫外发散的问题. 此定理最初由超空间的 Feynman 图方法证明 [41]，亦可见 [38, 42]. 另一种利用超势全纯性的优美证明可见 [37, 43, 44].

对应于矢量超多重态的超场 V ，即矢量超场. 它是满足条件 $V^\dagger = V$ 的超空间标量. 由于它包含矢量场，因而可为其引入规范对称性. 设规范群 G 的生成元 T^a 满足对易关系 $[T^a, T^b] = i t^{abc} T^c$ ，其中 t^{abc} 是结构常数，且满足归一化关系 $\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. 则矢量超场 $V = V^a T^a$ 的超规范变换为 $e^{2V} \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^{2V} e^{i\Lambda}$ ，其中 $\Lambda = \Lambda^a T^a$ 是任意手征超场. 利用 Λ 中的 $(\text{Re } \phi, \chi^\alpha, F)$ 分量对 V 作超规范变换，可使 V 仅包含 (A_μ, λ, D) 三种场量，其中 A_μ 是实的矢量场， λ 是 Majorana 旋量， D 是实标量辅场，而 Λ 中剩余的 $\text{Im } \phi$ 分量即对应于矢量场 A_μ 的规范变换参数. 现在，可由 V 构造规范协变的超场强 $W_\alpha \equiv -\frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_\alpha e^{2V})$ ，从而 $\text{tr}(W^\alpha W_\alpha)$ 是规范不变的组合.

与此同时，可引入规范群 G 的 r 表示下的手征超场 Φ ，其超规范变换为 $\Phi \rightarrow e^{-i\Lambda^a T_r^a} \Phi$ ，其中 T_r^a 为生成元 T^a 在 r 表示下的矩阵，因而在拉格朗日量中，代之以 $\Phi^\dagger \Phi$ ，应使用规范不变的组合 $\Phi^\dagger e^{2V^a T_r^a} \Phi$. 在一般的手征模型 (2.27) 中，也须在 Kähler 势中作相应替换.

现在，对给定的一组带有规范对称性 G_A 的矢量超场 V^A 和一组手征超场

Φ^I , 我们可以写出其一般的超对称拉格朗日量^① $\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_f$, 其中 $\mathcal{L}_K + \mathcal{L}_W$ 由 (2.27), 但是其 Kähler 势中形如 $\Phi^I \Phi^J$ 的量须替换为规范不变的组合 $\Phi^I (e^{2V^A T_r^A})^I_J \Phi^J$, 其中 $(e^{2V^A T_r^A})^I_J$ 是 $e^{2V^A T^A}$ 在手征超场 Φ^I 所居之表示下的矩阵; 与此同时, 超势 \mathcal{W} 也须为规范不变量. 而 \mathcal{L}_f 项则由下式给出,

$$\mathcal{L}_f = \text{Re} \int d^2\theta \text{ tr} \left[f_{AB}(\Phi) W^{A\alpha} W_\alpha^B \right], \quad (2.30)$$

其中 $f_{AB}(\Phi)$ 是 Φ^I 的全纯函数, 且关于其指标对称. 当 $f_{AB}(\Phi)$ 为常数矩阵时, 为了使规范场得到符号正确的动能项, 须要求矩阵 $\text{Re } f_{AB}(\Phi)$ 正定. 特别地, 当 $f_{AB} = g_A^{-2} \delta_{AB}$ 时, 规范场有标准的动能项 $-\frac{1}{4g_A^2} \sum_A (F_A)_{\mu\nu}^a (F_A)^{\mu\nu a}$, 其中 g_A 是规范耦合常数, $(F_A)_{\mu\nu}^a$ 是协变的规范场强. 现在, 从 (2.30) 中消去辅场 D 后, (2.30) 对标量势有如下新的贡献,

$$V_D(\phi) = \frac{1}{2} (\text{Re } f)^{-1AB} \left[\phi^{*I} \mathcal{K}_{JI^*}(T_r^A)^J_K \phi^K \right] \left[\phi^{*L} \mathcal{K}_{ML^*}(T_r^B)^M_N \phi^N \right], \quad (2.31)$$

其中 $(T_r^A)^I_J$ 是生成元 T_A 在 Φ^I 所居表示下的矩阵. 此项习称为标量势的 D 项. 因而, 在整体超对称理论中, 标量势 $V(\phi)$ 由两部分贡献, $V(\phi) = V_F(\phi) + V_D(\phi)$, 其中每一项都是非负的.

超对称标准模型 在众多超越标准模型的新物理模型中, 超对称模型是被研究得最广泛的一类. 严格的超对称要求每种基本粒子都有与其质量相同的超对称伴子, 而这显然与目前的实验观测结果不符. 因此, 超对称即使存在于基本相互作用的规律中, 也必须在一定能量尺度破缺. 粒子物理学中目前流行的超对称模型大多假设超对称破缺的尺度低至 TeV 能区 (也有例外, 如 split 超对称^[45, 46]). 这假设没有必然的理由. 通常认为, 支持 TeV 超对称的理由大致有三点. 一是, TeV 尺度的超对称可以屏蔽更高能量的新物理对 Higgs 势二次项的幂次型量子修正, 使 Higgs 势不受紫外物理的强烈干扰; 二是, TeV 尺度的超对称将修改强、弱、电磁三种规范相互作用的耦合常数的跑动行为, 且将导致 10^{16}GeV 左右的大统一 (见图 2.1)^②; 三是, TeV 尺度的超对称理论中存在稳定的弱作用的重粒子^③ (weakly interacted massive particle, WIMP), 理论预言当前宇宙中 WIMP 的能量密度可与目前观测到的暗物质密度相容, 因此超对称理论中的 WIMP 可作为暗物质粒子的候选者.

^①当矢量超场的规范群是阿贝尔群时, 其 D 分量是规范不变的, 因而也可直接加入拉格朗日量中, 称为 Fayet-Iliopoulos D 项.

^②注意, 图 2.1 中的耦合常数 (g_2, g_1) 与本文其余章节所用的 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的耦合常数 (g, g') 之间满足关系 $g_2 = g$, $g_1 = \sqrt{5/3}g'$.

^③注意, 此处的“弱作用”就相互作用的强度而言, 并非指弱规范相互作用.

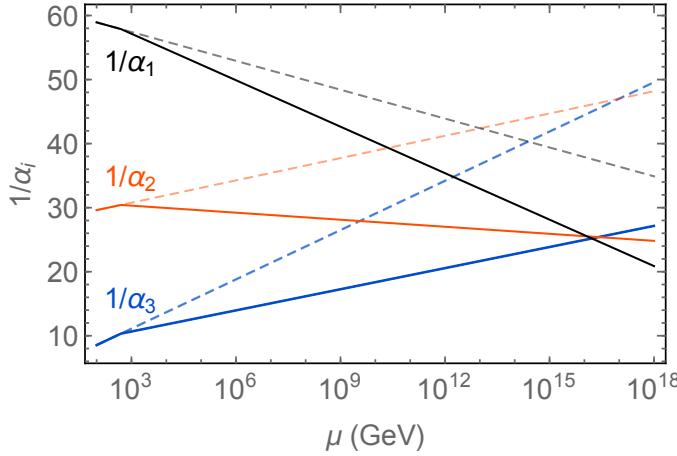


图 2.1 标准模型规范耦合常数的一圈图跑动. 其中 $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ ($i = 1, 2, 3$), (g_3, g_2, g_1) 分别是 $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ 的耦合常数. 虚线代表使用标准模型 β 函数的结果, 实线代表使用 MSSM β 函数的结果.

将标准模型超对称化的典范模型是最小超对称标准模型 (minimal supersymmetric standard model, MSSM), 现简要介绍之. 更详细的讨论可见 [47].

在 MSSM 中, 标准模型的每种规范玻色子都被嵌入矢量超多重态、每种费米子 (轻子和夸克) 都被嵌入手征超多重态. 其结果是, 每种规范玻色子都有其对应的自旋 $1/2$ 的费米型超伴子, 而每种轻子或夸克都有相应的标量超伴子. 至于 Higgs 二重态, 我们不仅需要将其嵌入手征超多重态、使之获得其费米型超伴子, 还需要引入另一个 Higgs 超多重态. 其原因有二, 一者, 当标准模型 Higgs 场耦合到 “下型” (down-type) 右手夸克时, 为了构成 $U(1)_Y$ 中性的项, 须取其复共轭 $\tilde{H} = i\tau^2 H^*$. 但超势的全纯性不允许出现复共轭形式的超场, 因此在超对称理论中, 为了与下型右手夸克耦合, 需要新的 Higgs 超场, 记作 H_d , 且其 $U(1)_Y$ 荷为 $-1/2$, 与标准模型 Higgs 场相反. 而 MSSM 中与标准模型 Higgs 场量子数相同的超场则记作 H_u . 再者, Higgs 场 H_u 的费米型超伴子可贡献到引起规范反常的三角图中. 为保持理论的自洽性, 即消去规范反常, 需要另一个 Higgs 场的费米型超伴子, 而这由 H_d 提供. 由于 H_u 与 H_d 都位于 $SU(2)$ 的基础表示, 因而可将它们参数化为 $H_u = (H_u^+, H_u^0)^T$, $H_d = (H_d^0, H_d^-)^T$.

在超势 \mathcal{W} 中, 单由 H_u 和 H_d 构成的可重整的项 (即量纲 ≤ 3) 为如下的 μ 项,

$$\mathcal{W}_\mu = \mu H_u H_d, \quad (2.32)$$

其中 $H_u H_d \equiv \epsilon^{\alpha\beta} (H_u)_\alpha (H_d)_\beta = H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0$, 而系数 μ 量纲为 1. 在超对称的拉格朗日量中, μ 是唯一有量纲的参量. 在 MSSM 中, 各 Higgs 粒子的质量、以

及规范玻色子的质量，即由 μ 和超对称软破缺的质量参数 M_{soft} 决定。假设两者间不需要严重的微调即可给位于 $\mathcal{O}(100\text{GeV})$ 附近的各玻色子的质量，要求 μ 和 M_{soft} 都需在 $\mathcal{O}(\text{TeV})$ 附近。这构成的所谓的“ μ 疑难”，即超对称理论中的 μ 参数为何要与超对称破缺尺度同量级，而不是与，比如说，Planck 尺度同量级。目前已有各种解决 μ 疑难的途径，它们都需要超出 MSSM。一种下文将会提到的方式是所谓次最小超对称标准模型（next-to-minimal supersymmetric SM, NMSSM）^[48]，这种模型在 MSSM 的基础上添入一个新的规范单态手征超多重态 S ，并将 MSSM 的 μ 项替换为 $\lambda S H_u H_d$ 。于是，MSSM 的 μ 可通过 S 中标分量的真空期望值而得， $\mu = \lambda \langle S \rangle$ 。

作为现象学模型，超对称标准模型中的超对称性必须破缺，且目前的实验结果对这破缺的尺度有相当严格的限制，一般而言不会低于 $\mathcal{O}(\text{TeV})$ 。然而符合实验观测的超对称破缺一般来说无法在 MSSM 自身实现，因而必须假设超对称破缺源于 MSSM 之外一个隐区域（hidden sector），最终通过某个“信使”（messenger）传递给 MSSM。流行的超对称破缺传递机制有引力传递（gravity mediation）、规范传递（gauge mediation），和反常传递（anomaly mediation）。这部分内容与本文研究关系不大，因此这里不再详述。相关内容可见 [37, 47, 49, 50]，以及 [51] 中的相关综述。

2.3.2 大统一理论

粒子物理的标准模型有 19 个独立的输入参数，除了 Higgs 势 (2.5) 中的 μ 与 λ 之外，还包括 3 个规范耦合常数，9 个夸克与带电轻子的质量、4 个 CKM 矩阵的混合角与相位，以及 QCD 的 θ 项。作为描述自然界相互作用的基本理论，如此多的自由参数容易使人怀疑，其背后还有更基本的物理原理，将这些表面的自由参数关联起来。大统一理论（grand unification theory, GUT）即源于这样的考虑^[52, 53]。此理论核心在于规范耦合常数 (g_3, g_2, g_1) ，或更根本的，标准模型规范群 $G_{\text{SM}} \equiv SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的统一。完整的大统一理论还试图统一解释 Yukawa 耦合（即费米子质量与混合），本文不拟涉及。

在前一节图 2.1 我们已看到，加入超对称的标准模型中，3 个规范耦合常数 (g_3, g_2, g_1) 的重整化群跑动使它们在大约 10^{16}GeV 处几乎交于一点。这是对超对称与大统一的重要支持。这提示我们，标准模型规范群可在 $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}\text{GeV}$ 附近（通常称为 GUT 尺度）从某个更简单的规范群（称为 GUT 群）自发破缺而来。这将导致某些物质场获得很大的质量 $\mathcal{O}(M_{\text{GUT}})$ ，而标准模型诸粒子（在超对称理论中还有其超对称伴子）则保持远小于 M_{GUT} 的质量。其结果是，在 M_{GUT} 以上，所

有 GUT 理论物质场的质量皆可忽略, 由于它们形成 GUT 群的线性表示, 因而共同贡献到 GUT 规范耦合的跑动; 而在 M_{GUT} 以下, 获得 M_{GUT} 质量的粒子不参与规范耦合的跑动, 导致各耦合常数 (g_3, g_2, g_1) 逐渐分离, 直至我们在电弱尺度所观测到的大小.

统一标准模型规范群所需的最小单群是 $SU(5)$. 由 $SU(5)$ 自发破缺到标准模型规范群 G_{SM} , 可通过位于 $SU(5)$ 的 **24** 表示 (伴随表示) 的 Higgs 场 Σ 获得真空期望值 $\langle \Sigma \rangle = \sqrt{2/15}u(1, 1, 1, -3/2, -3/2)$ 而得, 其中 u 是 GUT 期望值, 对于超对称理论约为 10^{16}GeV . 与此同时, 标准模型费米子可被嵌入如下的 $SU(5)$ 表示,

$$\chi_L = \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ & & 0 & u_3 & d_3 \\ & & & 0 & e^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^+ \\ v^c \end{pmatrix}_R, \quad (2.33)$$

其中 χ_L 和 ψ_R 分别是 $SU(5)$ 的 **10** 和 **5** 表示. 另外, 为了破缺电弱对称性, 仍需要将标准模型的 $SU(2)$ 二重态场嵌入 $SU(5)$, 由此得到位于 **5** 表示的 Higgs 场 $H = (H_c^1, H_c^2, H_c^3, H_u^+, H_u^0)^T$, 其中 H_c^i 是带色的 Higgs 场. 在超对称的理论中, 与 MSSM 相似, 还需要另一个 **5** 表示的 Higgs 场 $\bar{H} = (\bar{H}_c^1, \bar{H}_c^2, \bar{H}_c^3, H_d^-, -H_d^0)^T$ 以保证反常相消以及超势的全纯性.

由此可见, $SU(5)$ 可完全统一规范耦合常数, 但不能完全统一费米子部分, 因为每一代费米子仍然需要两组场 χ 与 ψ 以容纳之. 在此意义上, 完整的大统一可由 $SO(10)$ 实现, 而 $SU(5)$ 可通过 $SO(10)$ 破缺而得, 即 $SO(10) \rightarrow SU(5) \otimes U(1)_X \rightarrow G_{\text{SM}}$, 其中, 如果电弱 $U(1)_Y$ 完全来自 $SU(5)$, 即与上文讨论的 Georgi-Glashow $SU(5)$ 相同; 如果 $U(1)_Y$ 还接受来自 $U(1)_Y$ 的混合, 则得到所谓 Flipped $SU(5)$ 模型 [54, 55]. 另外, 除了 $SU(5)$, $SO(10)$ 还可经 $SO(10) \rightarrow SU(4)_c \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \rightarrow G_{\text{SM}}$ 破缺到标准模型规范群, 其中, $SU(4)_c \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ 即大统一的 Pati-Salam 模型 [53, 56].

大统一尺度 $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}\text{GeV}$ 与宇宙暴胀时期的能量密度同量级 (见 4.1 节和 5.2 节), 这可以是巧合, 但也可能暗示大统一理论与暴胀期间物理过程的某种关联. 我们将在 5.2 节探索后面这种可能性. 在那里, 我们将详细介绍 GUT 群的破缺方式.

大统一理论最直接的后果是核子衰变, 尤其是质子衰变, 因为 GUT 规范场所传递的过程破坏重子数守恒, 此过程的低能有效算子的量纲为 6, 且正比于 M_X^{-2} , 其中 $M_X \sim \mathcal{O}(M_{\text{GUT}})$ 为 GUT 规范场的质量. 因而质子在此衰变道 ($p \rightarrow e^+ \pi^0$) 的

寿命 $\tau \propto M_X^4$. 到目前为止, 尚未观测到质子衰变, 因而只有其寿命的下限, 这给出了 GUT 规范场质量 M_X 的下限. 由于此下限, 以及其他限制, 非超对称的最小 $SU(5)$ 大统一理论已被排除. 另外, 由于非超对称理论还有规范等级问题 (gauge hierarchy problem), 因而在大统一模型的构造中, 考虑超对称理论是更自然的.

在超对称 $SU(5)$ 中, 由于超对称伴子的出现, 除了上述量纲为 6 的有效算子, 还有量纲为 5 的有效算子可导致质子衰变 $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$. 此类算子可通过在 $SU(5)$ 理论中引入新的对称性予以禁戒, 然而, 为带色 Higgs 场赋予质量的真空期望值通常会破坏此类对称性, 因而此类量纲为 5 的算子可由交换带色 Higgs 场 (H_c, \bar{H}_c) 产生. 目前没有观测到由量纲为 5 的有效算子导致的质子衰变, 这给带色 Higgs 场的质量带来限制. 在此限制下, 最小超对称 $SU(5)$ 的最简版本已被排除^[57], 但非最小的 $SU(5)$ 破缺模式、以及其他 GUT 群模型, 仍然满足目前的观测限制.

以上介绍了本文将会涉及的大统一理论的基础内容. 关于 GUT 规范群的破缺, 将在 5.2 节讨论超对称大统一暴胀时详细介绍. 关于超对称大统一的更多介绍, 可见 [58].

2.4 量子引力模型简介

2.4.1 超引力^①

超对称理论常有很好的紫外性质. 如 4 维 $\mathcal{N} = 1$ 理论的超势无重整; 超 Yang-Mills 理论的规范耦合常数的 β 函数可精确计算^②; $\mathcal{N} = 4$ 的理论紫外有限 (UV finite), 具有非平凡的紫外固定点, 等等. 由此可以想象, 将广义相对论超对称化, 也许是改善其紫外性质的一种方式. 超对称化的引力理论即超引力 (supergravity). 在超引力理论建立之初, 它曾被认真地考虑为有希望的紫外完备的量子引力理论. 特别是 11 维 $\mathcal{N} = 1$ 的理论, 经降维 (dimensional reduction) 后成为 4 维的 $\mathcal{N} = 8$ 理论, 曾被认为是“万物理论” (theory of everything) 的候选者. 但很快, 它就让位于超弦理论 (superstring theory). 现在, 超引力通常被看作超弦理论的“低能极限”. 关于超引力的介绍性文献, 可见 [34, 38, 42, 59]; 关于弦论的介绍性文献, 可见 [49, 50, 60–63].

引入超引力的另一种途径是将整体超对称局域化. 由于超对称代数包含 Poincaré 代数, 因此局域化的超对称导致局域化的 Poincaré 对称性, 因此必然包含引力. 引力子是自旋为 2 的零质量粒子. 在超对称化后, 它包含于超引力多重态

^① 本小节取 $M_P = 1$.

^② 前提是红外发散被恰当地处理, 例如通过瞬子 (instanton) 背景.

中。此多重态还包括一对自旋 3/2 的费米子，称为引力微子（gravitino）。包含引力子和引力微子的、具有局域超对称和广义协变性的作用量可写出如下，

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[e\mathcal{R} - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma + e(M^*M + b_\mu b^\mu) \right]. \quad (2.34)$$

其中， $e \equiv \det e_\mu^p$ ， ψ_μ 是 Majorana 型旋矢量，复标量 M 与实矢量 b_μ 是为保持离壳超对称而引入的辅场^①。将此超引力多重态以保持超对称的方式耦合于物质场，至少有三种方法，然而都相当复杂。一是前文介绍过的超场方法，二是超共形方法，三是 Nöther 构造（Nöther construction）。关于超共形方法，可参考 [34]；关于 Nöther 构造，可参考 [37]。这里简要列出超场方法的结果^[38]，且仅限于下文研究所需的部分。

超引力的标量势 包含超引力的局域化超对称需要弯曲的超空间，带有非零的曲率和挠率^②。此时，手征超场 Φ 定义为 $\bar{\mathcal{D}}_\alpha \Phi = 0$ ，其中 $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$ 是包含超空间联络的协变导数。为写出由 Kähler 势 \mathcal{K} 和超势 \mathcal{W} 刻画的作用量，我们先将相应的整体超对称拉格朗日量 (2.27) 改写为如下的手征形式，

$$\mathcal{L} = 2\text{Re} \int d^2\theta \left[-\frac{1}{8} \bar{\mathcal{D}}_\alpha \bar{\mathcal{D}}^\alpha \mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger) + \mathcal{W}(\Phi) \right], \quad (2.35)$$

其中 $-\frac{1}{8}\bar{\mathcal{D}}^2$ 是手征投影算子。现在，将上式中各量换为弯曲超空间中相应的量，即， $\theta^\alpha \rightarrow \hat{\theta}^\alpha$ ， $d^2\theta \rightarrow d^2\hat{\theta} 2\mathcal{E}$ ， $-\frac{1}{8}\bar{\mathcal{D}}^2 \rightarrow -\frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}^2 - 8\mathcal{R})$ ，这里 $\hat{\theta}^\alpha$ 是弯曲超空间中带有 Lorentz 指标的旋量坐标， \mathcal{E} 是超空间的标架场， $-\frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}^2 - 8\mathcal{R})$ 是弯曲超空中作用于 Lorentz 标量的手征投影算子，而 \mathcal{R} 是超空间的标量曲率。于是，可得如下拉格朗日量，

$$\mathcal{L} = 2\text{Re} \int d^2\hat{\theta} 2\mathcal{E} \left[3\mathcal{R} - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}_\alpha \bar{\mathcal{D}}^\alpha - 8\mathcal{R})\mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger) + \mathcal{W}(\Phi) \right],$$

其中，我们已包含 Einstein-Hilbert 项的超空间对应，即 $6\mathcal{E}\mathcal{R}$ 。此项可与 Kähler 项合并，且重求和如下，

$$\begin{aligned} 3\mathcal{R} - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}^2 - 8\mathcal{R})\mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger) &= -\frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}^2 - 8\mathcal{R})[3 + \mathcal{K}(\Phi, \Phi^\dagger)] \\ &\Rightarrow -\frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}^2 - 8\mathcal{R})\Omega(\Phi, \Phi^\dagger), \end{aligned}$$

^① 这可通过简单的自由度计数而理解：度规场 $g_{\mu\nu}$ 模去规范变换（广义坐标变换）自由度后，有 $10 - 4 = 6$ 个离壳自由度，加上玻色型辅场 (M, b_μ) 中的 6 个实自由度，共计 12 个玻色自由度；而 Majorana 旋矢量 ψ_μ 中共有 $4 \times 4 = 16$ 个自由度，模去 4 个规范自由度，总计 12 个费米自由度。

^② 注意即使在整体超对称理论的超空间中，挠率也非零。

其中 $\Omega \equiv 3 \exp(\mathcal{K}/3)$. 由是, 我们得到超引力理论中手征超场 Φ 的一般拉格朗日量如下,

$$\mathcal{L} = 2\text{Re} \int d^2\hat{\theta} 2\mathcal{E} \left[-\frac{1}{8} (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} - 8\mathcal{R}) \Omega(\Phi, \Phi^\dagger) + \mathcal{W}(\Phi) \right]. \quad (2.36)$$

将此拉格朗日量用超场的分量表出, 完成 $\hat{\theta}$ 积分, 并消去辅场, 可得引力场的拉格朗日量,

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{6} e \Omega(\phi, \phi^\dagger) \mathcal{R}. \quad (2.37)$$

这比标准的 Einstein-Hilbert 项多出因子 $\Omega/3$, 它可通过 Weyl 变换 $e_\mu^m \rightarrow \sqrt{3/\Omega} e_\mu^m$ 消去. 在 Weyl 变换之后, 引力场与标量场 ϕ^I 的拉格朗日量为,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} e \mathcal{R} + e \mathcal{K}_{IJ^*} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi^I) (\partial_\nu \phi^{*J}) - e V_F(\phi), \quad (2.38)$$

其中, F 项标量势 $V_F(\phi)$ 为,

$$V_F(\phi) = (\exp \mathcal{G}) \left(\mathcal{G}^{IJ^*} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi^I} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi^{*J}} - 3 \right), \quad (2.39)$$

其中 $\mathcal{G} \equiv \mathcal{K} + \log |\mathcal{W}|^2$, \mathcal{G}^{IJ^*} 是矩阵 $\partial^2 \mathcal{G} / \partial \phi^I \partial \phi^{*J}$ 的逆. 容易看出, 若将以上 F 项标量势 (2.39) 按 M_P 展开, 在领头阶即回到整体超对称理论的 F 项标量势 (2.29). 但与 (2.29) 的一个显著区别是, 超引力中的 F 项标量势并不正定, 因为在 (2.39) 右侧括号的两项中, 前者正定而后者为负. 这导致超引力与整体超对称理论的一个重要区别, 即超对称是否破缺与真空能是否为零在超引力理论中无必然的联系. 而这一点在超引力的现象学应用中很重要, 因为它可以保证真空能 (即宇宙学常数) 即使在超对称破缺后也为零 (至少在树图阶).

无标超引力 上文提到, 超引力的 F 项标量势并不正定, 因此可以在超对称破缺后仍然维持真空能为零. 从 (2.39) 可见, 如果 \mathcal{G} 满足方程,

$$\mathcal{G}^{IJ^*} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi^I} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi^{*J}} = 3, \quad (2.40)$$

则标量势 $V_F(\phi)$ 恒为 0. 容易验证, 以下形式的 \mathcal{G} 可解方程 (2.40),

$$\mathcal{G} = -3 \log \left(T + T^* - \frac{1}{3} \sum_i |\phi_i|^2 \right), \quad (2.41)$$

其中 T 称为模场 (modulus field), 可来自超弦理论中紧化的额外维, 而 ϕ_i 代表各物质场. 事实上, 由此形式的 Kähler 势, 可求出,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{TT^*} &= \frac{T + T^*}{3(T + T^* - \frac{1}{3} |\phi_i|^2)}, \\ \mathcal{G}^{T\phi_i^*} &= \frac{\phi_i}{3(T + T^* - \frac{1}{3} |\phi_i|^2)}, \\ \mathcal{G}^{\phi_i \phi_j^*} &= \frac{\delta_{ij}}{3(T + T^* - \frac{1}{3} |\phi_i|^2)}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

以及,

$$\mathcal{G}_T = \frac{-3}{T + T^* - \frac{1}{3}|\phi_i|^2}, \quad \mathcal{G}_{\phi_i} = \frac{\phi_i^*}{T + T^* - \frac{1}{3}|\phi_i|^2}, \quad (2.43)$$

由之可立即验证方程 (2.40). 具有如 (2.41) 形式的 Kähler 势所对应的超引力理论被称为无标超引力 (no-scale supergravity) [64–66]. 其中, 无标的含义有两层, 一是, 真空值取在 ϕ_i 流形上的任何非零点时, 超对称都被破缺, 但树图真空能仍保持为零; 二是, 引力微子的质量在树图并不确定, 因而与超对称破缺的尺度无关. 无标超引力可由超弦理论的简单紧化而来 [67], 因而可作为超弦理论的低能现象学模型. 另外, 无标超引力的标量场空间中有很多平坦的方向, 因而适于构造宇宙学模型. 在本文 5.2 节, 我们将详细介绍一类无标超引力框架下的大统一暴胀模型.

2.4.2 其他量子引力模型与维数自发缩减

除了超弦或超引力外, 还有很多有颇具启发性的量子引力模型, 如正则量子引力 (或称圈量子引力) [68, 69]试图将广义相对论作正则量子化. 渐进安全 (asymptotic safety) [70–75]的理论建立于广义相对论在紫外存在非高斯固定点的假设. 近年已有很多研究发现了此固定点的存在证据. 另一类 Hořava-Lifshitz 引力 [76–79]则假设时间和空间在紫外的标度行为由非各向同性的动力学临界指数控制, 由此可提供广义相对论的紫外完备化. 此外, 也有研究时空量子动力学的数值方法. 特别是一种称为因果性动力学三角剖分 (causal dynamical triangulation, CDT) [80–83]的数值方法, 在保持因果结构的条件下将时空作单形剖分, 并在此基础上数值地作路径积分, 可以得到光滑时空作为其红外极限.

本小节将择要介绍这些研究量子引力的尝试. 我们所关注的重点是, 所有这些研究都从不同的角度发现了一种时空维数自发缩减 (spontaneous dimensional reduction, SDR) 的新奇现象 [84–86]. 这种现象是指, 在红外 / 低能时维数为 $n = 4$ 的时空, 由于量子引力效应, 在紫外 / 高能时逐渐下降, 最终达到其紫外值 $n = 2$. 时空维数在偏离整数值时, 其意义需要特别的说明. 在这些量子引力方法中, 非整数维数的定义各异. 因此这些研究还不能算是 SDR 的确切证明. 但 SDR 以不同的形式普遍出现于各种不同的量子引力模型中, 则是值得注意的事实. 根据 SDR 概念的提出者 S. Carlip 的猜想, SDR 很可能代表了量子引力在 Planck 尺度以下的一种普适性质, 恰如同各种不同的量子引力模型皆可得出黑洞熵的面积律. 根据这种精神, 用有效场论的方式研究 SDR 就是有意义的, 恰如用半经典方法研究黑洞熵所给出的有启发意义的结果一样. 关于 SDR 的有效理论, 将在第 3 章详细讨论.

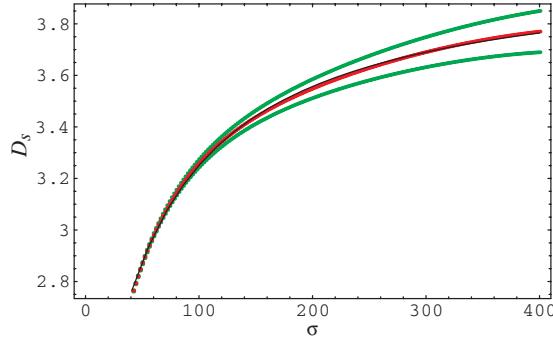


图 2.2 时空的谱维数作为扩散时间的函数. 取自 [82].

因果性动力学三角剖分 (CDT) 量子效应很可能导致引力在紫外成为强耦合的相互作用, 因而不能用简单的微扰论研究. 此时, 如同 QCD 中在强耦合区域可用格点方法研究一样, 时空的量子性质亦可用格点计算予以研究. 根据路径积分的思想, 配分函数以及所有可观测量, 可通过对所有可能的物理位形适当地求和而得. 将这种想法离散化, 就是 CDT 的基本方法. 我们并不详述这种数值方法的细节, 而仅是指出, 其中时空的有效维数并非事先给定的量, 而是可以通过计算预测的结果. 一种计算的方式, 是考察扩散方程 [82],

$$\frac{\partial}{\partial t} K_g(x, x_0; t) = \Delta_g K_g(x, x_0; t), \quad (2.44)$$

其中 $K_g(x, x_0; t)$ 是在时间 t 内从点 x_0 扩散到 x 的概率密度, Δ_g 是 Laplace 算子. K_g 和 Δ_g 皆依赖于时空的度规 $g_{\mu\nu}$. 对于 n 维平空间 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 在给定初条件 $K_\eta(x, x_0, t = 0) = \delta^n(x - x_0)$ 时, 易知上方程的解为 $K_\eta(x, x_0; t) = e^{-|x-x_0|^2/4t}(4\pi t)^{-n/2}$, 于是, 返回概率 (return probability),

$$P_\eta(t) \equiv \frac{1}{V} \int d^n x K_\eta(x, x_0; t) = t^{-n/2} \quad (2.45)$$

对时间 t 的依赖即反映了时空的维数 n . 这启发我们在一般的情况下定义有效的谱维数 (spectral dimension) 为,

$$n_s \equiv -2 \frac{d \log P_g(t)}{d \log t}. \quad (2.46)$$

CDT 方法可对此谱维数作数值求解, 并得到随尺度而变的结果. 即, 时空的谱维数 n_s 在红外趋于经典值 4, 而在紫外趋于 2, 如图 2.2 所示. 在这两者之间, 谱维数 n_s 随尺度 (扩散时间 t) 的跑动可用一函数拟合. 例如一个取自 [82] 的例子为 $n_s(t) = a - b/(t + c)$, 其拟合结果为 $a = 4.02$, $b = 119$, $c = 54$. 因而, 在紫外极限 $t \rightarrow 0$ 时, $n_s \simeq 1.82$ 而在红外极限 $t \rightarrow \infty$, $n_s \simeq 4.02$.

Hořava-Lifshitz 引力 Hořava-Lifshitz 模型是将万有引力在紫外完备化的一种尝试. 其要义在于时间和空间在紫外的标度变换可以不同, 因而, 此模型在紫外放弃 Lorentz 对称性. 当然, 在量子引力中放弃 Lorentz 对称性是自然的, 但是如何保证其红外极限有良好的 Lorentz 对称性, 以及如何通过目前很多精确检验 Lorentz 对称性实验的限制, 仍然是值得注意的问题.

Hořava-Lifshitz 模型中的时空不对称可通过称为 Lifshitz 标量的模型清楚地展示. 在 $n = D + 1$ 维时空中, Lifshitz 标量 ϕ 有如下作用量,

$$S = \int dt d^D x \left[\dot{\phi}^2 - (\partial_i \partial_i \phi)^2 - c^2 (\partial_i \phi)^2 \right], \quad (2.47)$$

其中 $\partial_i \equiv \partial / \partial x^i$ 是对空间坐标的导数. 在紫外, 上式中前两项主导理论的标度变换. 如果这两项的标度变换相同, 则导致时空的非对称标度变换, $t \rightarrow \lambda^2 t$, $x^i \rightarrow \lambda x^i$. 在红外, c^2 项主导, 因而理论回到时空标度对称的相对论性理论中. 此模型中, 紫外作用量中的势能项 $(\partial_i \partial_i \phi)^2$ 可被重新写为 $(\delta W / \delta \phi)^2$ 的形式, 其中 $W[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x (\partial_i \phi)^2$ 是 3 维空间的作用量. 满足这种形式的势能项被称为满足“精细平衡条件”(detailed balanced condition).

通过观察 Lifshitz 标量的传播子 $G(k)$, 容易理解此理论中可重整性的改善, 即在紫外有 $G(k) \propto k^{-4}$, 而红外有 $G(k) \propto k^{-2}$. 这暗示 Lifshitz 型理论可提供引力的紫外完备化, 因为引力微扰论中圈动量的发散来自其不可重整的耦合常数 $\kappa \propto M_p^{-1}$, 而如果引力的传播子有更多的动量负幂次贡献, 则有可能改善其圈图的动量发散.

Hořava 给出了这样的量子引力模型, 根据时空标度对称性在紫外的行为 $t \rightarrow \lambda^z t$, $x^i \rightarrow \lambda x^i$, 此类模型可按动力学临界指数 z 分类. 以上 Lifshitz 标量理论即对应于 $z = 2$. 在 $z = 3$ 的情形, 可写出如下的引力作用量,

$$S = \int dt d^3 x \sqrt{-g} N \left[\frac{2}{\kappa^2} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) - \frac{\kappa^2}{2} \mathcal{G}_{ijkl} \frac{\partial W}{\partial \hat{g}_{ij}} \frac{\partial W}{\partial \hat{g}_{kl}} \right], \quad (2.48)$$

其中, κ 是耦合常数, \hat{g}_{ij} 是 3 维空间的度规, K_{ij} 是等时面的外曲率(见 2.2 节). 这里已将作用量写成满足精细平衡条件的形式, 其中 \mathcal{G}_{ijkl} 是空间度规 \hat{g}_{ij} 所在的场空间中的 DeWitt 度规, W 是 3 维空间的作用量,

$$W = \frac{1}{w^2} \int \omega_3(\hat{\Gamma}) + \mu \int d^3 x \sqrt{\hat{g}} (\hat{\mathcal{R}} - 2\Lambda_W), \quad (2.49)$$

其中 $\omega_3(\hat{\Gamma})$ 是 3 维引力的 Chern-Simons 3 形式, 对三维度规 g_{ij} 变分后它给出 Cotton 张量 $C^{ij} = \epsilon^{ik\ell} \hat{\nabla}_k (\hat{\mathcal{R}}_\ell^j - \frac{1}{4} \delta_\ell^j \hat{\mathcal{R}})$. 因而作用量 (2.48) 在紫外由势能项 $\propto C_{ij} C^{ij}$ 主导, 而导致 $z = 3$ 的时空不对称标度, 在红外由 Einstein-Hilbert 作用量主导, 回到 $3+1$ 维的相对论性理论.

值得注意的是，该理论在紫外的 $z = 3$ 标度行为，意味着标度变换 $t \rightarrow \lambda t$ 而 $x^i \rightarrow \lambda^{1/3}x^i$ ，这给出 $dt d^3x \rightarrow \lambda^2 dt d^3x$ ，因而时空的标度维数降至 2 维。事实上，Hořava-Lifshitz 模型与前文介绍的 CDT 方法关系密切。CDT 可看作 Hořava-Lifshitz 模型的一种离散化^[78, 87]。因而，Hořava-Lifshitz 模型也可看作时空维数自发缩减的具体实现。

渐进安全 渐进安全最初由 S. Weinberg 提出^[74, 75]，它是指，广义相对论虽然在微扰论意义下不可重整，但有可能是某个紫外完备的相互作用场论的低能极限。换言之，广义相对论的重整化群流在紫外可能源于一个非高斯固定点。为检验此猜想，可使用泛函重整化群方程（functional renormalization group equation）的方法，研究随能量尺度定义的 Wilson 有效作用量的重整化群流。在这种方法中，有效作用量 $\Gamma(\mu)$ 是广义相对论的经典作用量的直接推广，

$$\Gamma(\mu) = \frac{M_p^2(\mu)}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-2\Lambda(\mu) + \mathcal{R} + \dots \right], \quad (2.50)$$

其中，宇宙学常数 $\Lambda(\mu)$ 和 Planck 质量 $M_p(\mu)$ 皆依赖于能量尺度 μ ，而省略号代表高阶项，以及规范固定项和鬼（ghost）项。此有效作用量对能量尺度的依赖服从如下泛函重整化群方程，

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma[\phi, \bar{\phi}; \mu] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma[\phi, \bar{\phi}; k]}{\delta \phi^i \delta \phi^j} + \mathcal{C}(\mu) \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{C}(\mu)}{\partial \mu} \right], \quad (2.51)$$

其中 ϕ^i 代表所有的动力学场量， $\bar{\phi}^i$ 代表其背景值，而 $\mathcal{C}(\mu)$ 是红外截断。原则上， Γ 应当包含有效论中所有项，但这在实际操作这很难实现。因此，一种近似的做法是将有效作用量按算子的量纲阶段。比如，截断到量纲为 2 的一阶，即得 (2.50) 中的两项。这种简化称为 Einstein-Hilbert 截断。

在这种截断近似下，求解以上重整化群方程可以发现，的确存在非平庸的紫外固定点，从其中出发的重整化群流在红外流向广义相对论^[88]。简言之，可定义无量纲的 Planck 质量 $\tilde{M}_p(\mu) \equiv \mu^{-1} M_p(\mu)$ 。则在红外，Planck 参数的跑动由经典场论的质量量纲控制，即，有量纲的 Planck 参数保持为常数 $M_p \simeq 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$ ，而无量纲的 Planck 参数如同相关算子（relevant operator）的系数按幂次跑动；在紫外，由于量子引力的效应，出现了固定点，从而无量纲的 Planck 参量趋于常值，而有量纲的 Planck 参数按幂次跑动。红外和紫外行为的分界点，即量子引力效应开始起作用的尺度，记为 μ_{tr} 。这种跑动的简化示意图如图 2.3 所示。对于宇宙学常数 $\Lambda(\mu)$ 亦有类似的结果，此不赘述。

在渐进安全的量子引力中，SDR 首先表现为标度维数（scaling dimension）的跑动。简言之，量子引力的效应在紫外修改了所有算符的标度变换行为，其结果与

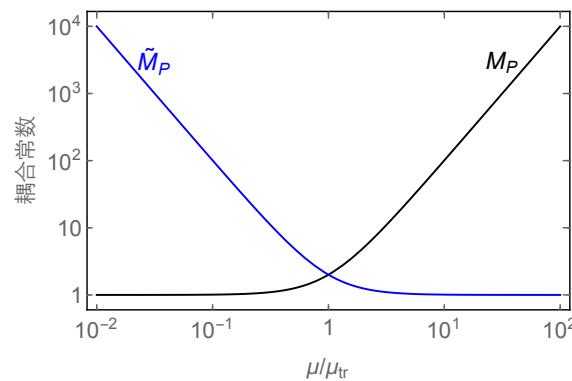


图 2.3 跑动的 Planck 质量的示意图. 其中黑线代表有量纲的 Planck 质量 M_P , 蓝线代表无量纲的 Planck 参数 \tilde{M}_P .

这些算符在时空维数 $n = 2$ 中的经典标度变换相同. 在这种意义上, 可以说量子引力效应等效地冻结了空间的 2 维. 另一种直观地看出标度维数跑动的方法是^[71], 研究有效的 Einstein 场方程在紫外固定点处的标度变换行为, 此时, 曲率半径正比于分辨率, 这提示时空在紫外的自相似特性. 此外, 还可讨论渐进安全理论中的谱维数和 Hausdorff 维数, 它们都揭示了时空在量子引力的作用下呈现出多分形 (multifractal) 的特征^[71].

第3章 Higgs-引力作用与弱规范玻色子散射

本章研究 Higgs 引力相互作用中的两类问题，一是量子引力的维数自发缩减效应对电弱破缺机制的影响，二是 Higgs 与标量曲率的非最小耦合。

如 2.4 节所及，维数自发缩减是很多量子引力模型的共同预言。为了以模型无关的方式研究这种效应的可能后果，特别是在低尺度量子引力理论中，其与电弱对称性破缺间可能存在的关系，我们将在 3.1 节发展一套描写时空维数自发缩减的有效理论，并以此研究弱规范玻色子的散射。

在 3.2 节中，我们将转而研究 Higgs 场 H 与标量曲率 \mathcal{R} 的非最小耦合 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 。此项在引力的有效理论中不可避免，且可具有重要的宇宙学后果（见第 4、5 两章）。因此，我们将在本章研究存在该项时的弱规范玻色子散射，以及 Goldstone 玻色子等价定理，并讨论其幺正性限制与对撞机信号。

3.1 维数自发缩减及其有效理论

本节将研究出现于 TeV 尺度的维数自发缩减 (SDR)。如 2.4 节所述，很多量子引力模型中都有 SDR 效应，尽管其细节各不相同，但都有一有效的维数 n ，在红外时退化为时空的维数 $n = 4$ ，但在紫外趋于 $n = 2$ 。为了刻画这个模型无关的普遍性质，我们将发展一套描写 SDR 的有效理论，然后将其应用于电弱对称性破缺的研究 [89,90]。

3.1.1 电弱破缺的 SDR 有效理论

在第 2 章中，我们介绍了与 SDR 有关的数种量子引力模型。SDR 在这些模型中的具体表现各不相同，但有一个共同的特点，即维数的有效缩减都可通过物理量的标度行为体现。为刻画这种与模型无关的普遍的标度性质，我们将使用有效场论处理之。在写下场论模型之前，我们首先引入随能量尺度 μ 而变的维数 $n = n(\mu)$ 。对于标准的线性空间，维数只能取整数值。因而，随能量尺度（或距离尺度）而变的维数，需要新的几何对象来描述。对这种未知的几何对象，容易想到的候选者是分形或多分形 [91]。在分形中，可定义非整数维数，而多分形的非整数维数还可随尺度而变。然而，分形和多分形在数学上仍然没有严格的定义。自然，这对于目前的有效场论构造，并非严重的困难，但是寻找 SDR 在数学上的严格实现，仍是有意义的问题。

当我们使用有效场论方法时，需要写下理论的有效作用量，它是拉格朗日量在时空中的积分。由于时空表现出 SDR 的行为，所以其积分测度 $d\rho$ 需要特别定义。对这种测度的数学构造，文献中已有尝试 [92–97]，然而这些数学细节在此处并不重要。关于 $d\rho$ ，我们唯一需要的性质是它的标度变换行为，即要求其能量量纲 $[d\rho] = -n(\mu)$ 随尺度而变。为突出这一性质，可以将此测度形式地记为 $d^n x$ 。于是，我们将要描述的有效理论的作用量 S 可表为，

$$S = \int d^n x \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

其中 \mathcal{L} 是拉格朗日量。根据 [92–97]，此拉格朗日量可写为保持 $(3+1)$ 维 Poincaré 对称性的形式，而所有 SDR 的效应都由积分测度 $d\rho = d^n x$ 控制。在此规定下，拉格朗日量中所有标量场、旋量场，以及矢量场都是 4 维时空 Lorentz 群 $SO(3, 1)$ （在相差规范变换意义下）的线性表示。这在形式上与熟知的维数缩减正规化（regularization by dimensional reduction）相同。与此相对的另一种方式是，将拉格朗日量的对称性亦取为随尺度而变，因而在 n 维中具有以 $SO(n-1, 1)$ 刻画的 Lorentz 对称性，这种方式近似于传统的维数正规化（dimensional regularization）。对于下文将要研究的弱规范玻色子散射，这两种定义拉格朗日量的方式给出的结果相同，这是由于，根据 Goldstone 玻色子等价定理 (2.1)，弱规范玻色子的散射在高能下的振幅与相应的 Goldstone 振幅（在相差常数相位的意义下）相等，而 Goldstone 振幅作为标量粒子散射的结果，不依赖拉格朗日量的对称性。我们在下文将用显式计算验证此结论。

关于维数 $n = n(\mu)$ 对能量尺度的依赖（下文称为维数流，dimensional flow），我们取之为 μ 的连续函数，且满足 $n(\mu \rightarrow 0) = 4$ 而 $n(\mu = \Lambda_{\text{SDR}}) = 2$ ，其中 Λ_{SDR} 为有效理论的紫外截断。在 Λ_{SDR} 之上的物理过程应由完整的量子引力理论描写；而在 Λ_{SDR} 以下、但不太低的能量尺度，时空已出现 SDR 效应，因而不可用经典时空的概念处理之。这一区间就是目前的有效理论所起作用的范围。对于现象学研究， n 在 $\mu = 0$ 与 Λ_{SDR} 间的行为可用一光滑函数参数化。CDT 方法提供了这种函数的例子，见 (2.46) 以下的讨论。此处，我们可取，

$$n(\mu) = 4 - 2 \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{SDR}}} \right)^\gamma, \quad (\mu \leq \Lambda_{\text{SDR}}) \quad (3.2)$$

其中指数 $\gamma > 1$ 是由量子引力动力学所决定的自由参数。当然，亦可选取其他参数化，例如，

$$n(\mu) = 3 - \tanh \log \left(\frac{\mu}{\Lambda_3} \right)^\delta, \quad \text{或者,} \quad n(\mu) = 4 - \frac{2}{1 + (\Lambda_3/\mu)^\epsilon},$$

其中 Λ_3 是维数流 $n(\mu)$ 降至 3 的尺度，而 δ 和 ϵ 如同 γ ，也是与紫外动力学有关的参数。然而，对于下文的分析而言，选取何种参数化，并不影响定性的物理结果，因而我们将使用 (3.2) 作为维数流的参数化，且取 $\gamma = 1.5$ 或 2 作为数值计算的例子。至于紫外截断 Λ_{SDR} 的尺度，则是可变的参数。自然，可以取 $\Lambda_{\text{SDR}} \sim \mathcal{O}(M_P)$ 。然而，也可以设想 $\Lambda_{\text{SDR}} \ll M_P$ ，以至于 $\Lambda_{\text{SDR}} \sim \mathcal{O}(10\text{TeV})$ ，亦即考虑 TeV 尺度的量子引力。额外维模型就是这类低尺度量子引力的显式例子。按照这种假设，SDR 与电弱对称性的破缺就可产生联系。

为突出 SDR 在电弱破缺中可能起到的作用，我们首先考虑一个简化的模型，即带有裸质量项的电弱规范场，

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + M_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (3.3)$$

其中 $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ 为 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的规范场的场强张量， $M_Z = M_W / \cos \theta_w$ ，而 $\theta_w = \arctan(g'/g)$ 是电弱混合角， (g, g') 为 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的规范耦合常数。而质量本征态对应的规范场 $(W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu)$ 与标准模型相同，即 $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)$ ，以及，

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

在 $(3+1)$ 维量子场论中，规范场的裸质量项破坏理论的规范对称性和幺正性。其中，规范对称性可以通过将裸质量项嵌入非线性实现的规范理论中而得以恢复，但是理论的微扰幺正性，则须通过某种规范对称性的自发破缺机制而恢复。我们将在下文看到，在包含 SDR 的理论中，矢量粒子的质量项并不破坏幺正性，因而 SDR 有可能在电弱对称性的自发破缺中起到重要作用。这一点不难理解，因为低维场论通常具有更好的紫外性质，而 SDR 恰在紫外将时空维数降低。从这个意义上，可以说量子引力的 SDR 效应为维数正规化提供了物理的实现。

对于标准模型的费米子部分，我们首先考虑一个 $SU(2)_L$ 左手二重态 $\Psi_L = (\psi_{1L}, \psi_{2L})^T$ 和相应的一对右手单态 ψ_{1R}, ψ_{2R} ，并写下它们的 Dirac 质量项如下，

$$\mathcal{L}_{Fm} = -m_1 \bar{\psi}_1 \psi_1 - m_2 \bar{\psi}_2 \psi_2. \quad (3.5)$$

如同 (3.3)，以上拉格朗日量也可看作幺正规范 (unitary gauge) 下除去 Higgs 玻色子的标准模型中的结果，且就是电弱手征拉格朗日量在规范群的非线性实现下的领头阶 [98–100]。这里简要介绍之。我们将 Higgs 二重态 H 与其共轭 $\tilde{H} = -i\tau^2 H^*$ 合并为 2 阶方阵 $\Phi = (\tilde{H}, H)$ ，并将 Φ 参数化为，

$$\Phi = \frac{1}{2}(v + \phi)\Sigma, \quad \Sigma = \exp(i\tau^a \pi^a/v), \quad (3.6)$$

其中 τ^a 是 Pauli 矩阵. 于是, 在导数展开的最低阶, 可得 ϕ 与 Σ 的动能项与相互作用项如下,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H = & \frac{1}{4}(v^2 + 2\kappa v\phi + \kappa'\phi^2) \text{tr}[(D_\mu\Sigma)^\dagger(D^\mu\Sigma)] \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}M_h^2\phi^2 - \frac{\lambda_3}{6}v\phi^3 + \frac{\lambda_4}{24}\phi^4,\end{aligned}\quad (3.7)$$

其中, 协变导数为 $D_\mu\Sigma = \partial_\mu\Sigma + \frac{i}{2}gW_\mu^a\tau^a\Sigma - \frac{i}{2}g'B_\mu\Sigma\tau^3$. 于是, 在么正规范 $\Sigma = 1$ 下, 以上动能项退化为 W 与 Z 的质量项, 即 $M_W = gv/2$. 与此类似, 可讨论费米子部分, 其领头阶的有效作用量可写为,

$$\mathcal{L}_{FH} = -\bar{\Psi}_L\Sigma\left(M_f + \frac{1}{2}\mathcal{Y}_f\phi\right)\Psi_R + \text{h.c.}, \quad (3.8)$$

其中, $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $M_f = \text{diag}(m_1, m_2)$, 而 Yukawa 相互作用 $\mathcal{Y}_f = 2M_f/v + \Delta\mathcal{Y}_f$, 其中 $\Delta\mathcal{Y}_f$ 代表 SM 之外的反常耦合.

现在, 如若将 Higgs 玻色子 ϕ 从以上手征拉格朗日量中移除, 则余下部分即为电弱对称性破缺的低能非线性有效理论的领头阶. 在该有效理论中, 除此领头阶之外, 还可系统地写下规范不变但表观不可重整的高阶项. 这些项在紫外将破坏理论的么正性, 因而需要被紫外完备化 (UV completion). 我们现在将解释, SDR 提供了一种可能的完备化方式.

为此, 注意到作用量在任何维数的时空中应保持无量纲. 根据前文对时空积分测度的规定, 这意味着拉格朗日量 \mathcal{L} 在 n 维时空中的量纲为 $[\mathcal{L}] = n$. 由于规范耦合常数在 n 维时空中具有量纲 $[g] = (4-n)/2$, 故知 SDR 发生后 g 将携带非零的能量量纲. 于是, 可定义无量纲的规范耦合 \tilde{g} , 使得 g 中的能量量纲转移到某个能量单位中. 由于有效作用量 (3.3) 中, 唯一带有能量量纲的参量是 M_W , 因而可按以下方式定义 \tilde{g} ,

$$g = \tilde{g}M_W^{(4-n)/2}, \quad (3.9)$$

同时, 使 \tilde{g} 在 $n = 4$ 时由 g 赋值. 以上关系应被视作模型定义的一部分. 除了这种定义方式, 还有一种可能性是利用理论的紫外截断 Λ_{SDR} , 定义 $g = \tilde{g}\Lambda_{\text{SDR}}^{(4-n)/2}$. 然而这种定义并不合适, 因为在 $n < 4$ 维空间中, g 作为超可重整 (super renormalizable) 算子的系数, 应敏感于红外而非紫外的物理.

不难理解, 由 (3.3) 所描写的理论在紫外 $n < 4$ 时行为良好. 这表面上是因为规范耦合常数带有正的能量量纲, 从而导致表观超可重整的理论. 而其背后的物理原因, 则在于低维时空中规范场的质量项并不影响理论的紫外完备性. 例如, 在 $(1+1)$ 维的量子电动力学 (QED), 即 Schwinger 模型中 [101], 由无质量的费米子圈贡献的真空极化将为规范场引入非零的质量 $m^2 = e^2/\pi$, 其中 e 是量纲为 1 的

规范耦合. 这亦可从自由度计数理解之: 在 $(1+1)$ 维时空中, 无质量的矢量粒子无传播的自由度, 因而, 若此时的矢量玻色子有任何传播的物理自由度, 则必为纵向极化, 从而其必为有质量的粒子. 与此类似, 在 $(2+1)$ 维时空的规范理论中, Chern-Simons 项也会为其规范场引入 (拓扑) 质量项^[102] $m = \kappa e^2$, 其中 κ 是无量纲的 Chern-Simons 耦合, 而 e 是量纲为 $1/2$ 的规范耦合. 从这两个例子可见, 在低维场论中, 除了 BEH 机制外, 还有不少为矢量玻色子引入质量的方式. 而且, 在这两个例子中, 有能量量纲的规范耦合常数都正比于规范粒子的质量, 这也为我们在上文引入的关系 (3.9) 提供了旁证.

以上介绍了电弱破缺 SDR 有效理论的基本结构. 简言之, SDR 的效应皆通过时空积分测度的标度变换行为而体现, 而拉格朗日量则与 $(3+1)$ 维的标准形式无异, 除了其中各场量与参数的标度变换. 我们使用非线性实现的电弱手征有效作用量以讨论 SDR 对理论紫外行为的改进. 以下, 我们将通过对弱规范玻色子散射的分波分析, 具体研究 SDR 对理论幺正性的影响.

3.1.2 分波分析与幺正性

在通常 $(3+1)$ 维量子场论中, 质量为 $M \neq 0$ 、动量为 k^μ 的矢量粒子的纵向极化矢量 ϵ_L^μ 由 (2.2) 给出. 在能量 $k^0 \gg M$ 时, ϵ_L^μ 近似正比于动量 k^μ . 因而, 纵向极化的矢量粒子散射的振幅在散射能量 $E \equiv k^0$ 很大时, 可能会依赖于 E 的正幂次, 因而随着散射能量的升高, 此振幅有破坏幺正性的危险.

在标准模型中, 从散射振幅的层面上看, Higgs 场正起到了将高能纵向弱玻色子散射的振幅幺正化的作用. 为此, 我们考虑过程 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$. 在幺正规范下, 所有的 Goldstone 粒子与物理粒子脱耦合, 因而对此过程有贡献的 Feynman 图在树图阶由图 3.1 给出.

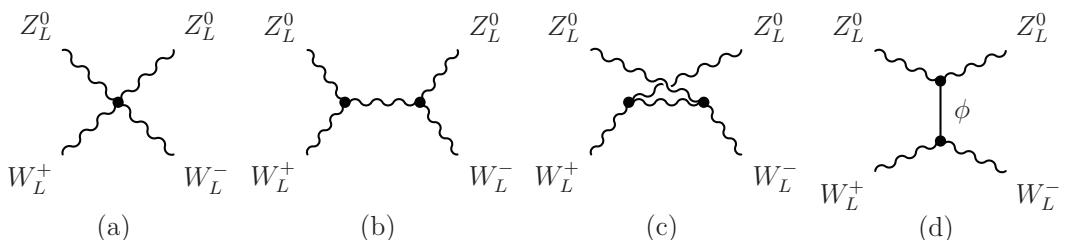


图 3.1 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$ 散射的树图.

通过简单的幂次计算可知, 在散射的质心系能量 $E \gg M_W$ 时, 图 3.1 中的 Feynman 图在领头阶可正比于 E^4 或 E^2 . 幺正性要求它们的总和不能包含正比于 E^4 或 E^2 的项, 因而这些正幂次项必须相互消去. 如果我们将每张图的结果参数

化为,

$$\mathbf{T} = g^2 \left[A \cdot \left(\frac{E}{M_W} \right)^4 + B \cdot \left(\frac{E}{M_W} \right)^2 + C + \mathcal{O}\left(\frac{M_W^2}{E^2} \right) \right], \quad (3.10)$$

则容易得到每张图的结果如表 3.1 所列. 表中 $c_\theta \equiv \cos \theta$, θ 是散射角, M_h 与 Γ_h 分别是 Higgs 玻色子的质量与衰变宽度 (此处已使用 Breit-Wigner 近似).

表 3.1 标准模型 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$ 树图散射振幅按 (3.10) 展开的系数.

Feynman 图	A	B	C
(a)	$\frac{1}{8}(-3 + c_\theta^2)$	1	0
(b)	$\frac{1}{16}(3 - 2c_\theta - c_\theta^2)$	$\frac{1}{8}(-3 + 15c_\theta)$	$\frac{1}{4}(1 - 7c_\theta + 10c_\theta^2)/(1 - c_\theta)$
(c)	$\frac{1}{16}(3 + 2c_\theta - c_\theta^2)$	$\frac{1}{8}(-3 - 15c_\theta)$	$\frac{1}{4}(1 + 7c_\theta + 10c_\theta^2)/(1 + c_\theta)$
(d)	0	$-\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4}(M_h^2 - iM_h\Gamma_h)/M_W^2$

从表 3.1 容易看出, 图 3.1 中纯由规范玻色子贡献的 (a)、(b)、(c) 三图在求和后无 E^4 项, 但有净的 E^2 项,

$$\mathbf{T}_{\text{HL}}(W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0) = \frac{g^2 E^2}{4M_W^2} + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.11)$$

其中下标 HL 表示无 Higgs 的部分. 此项在标准模型中由图 3.1(d) 的贡献消去, 从而总的结果不含质心系能量 E 的正幂次. 但对于删去了 Higgs 场 ϕ 的标准模型, (3.11) 将导致此过程的振幅在高能破坏理论的幺正性.

根据 Goldstone 玻色子等价定理, 以上散射振幅还可通过计算相应的 Goldstone 散射过程 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\pi^0$ 而得, 而后者由于只涉及标量粒子, 因而容易推广到任意维时空. 因此, 在下面的分波分析中, 我们将始终用 Goldstone 振幅.

现在我们加入 SDR 的效应. 根据前文讨论, 由于拉格朗日量保持不变, 故而在 SDR 有效理论中计算 Goldstone 振幅的方式与标准的 $(3+1)$ 维理论无异. 因此在删去 Higgs 场后, 纵向规范玻色子散射振幅 (或相应的 Goldstone 散射振幅) 仍有正比于 E^2 的项. 但是, 由于时空维数的缩减会导致散射末态相空间的缩减, 因而 SDR 将修改散射振幅的幺正性条件.

为得到 SDR 对幺正性条件的修改, 我么简要回顾 n 维时空的幺正性条件 [103]. 此条件来自 S 矩阵的幺正性, 即 $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$. 设其非平庸的部分为 \mathcal{T} , 即 $S = 1 + i\mathcal{T}$, 则有 $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = 2\text{Im}\mathcal{T}$. 进一步定义 $\mathcal{T} = (2\pi)^n \delta^n(p_f - p_i)\mathbf{T}$, 其中 p_i 和 p_f 分别为散射初态与末态的动量. 则对于 $2 \rightarrow 2$ 散射, 散射振幅 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(E, \theta)$ 总可表为散射质心系能量 E 与散射角 θ 的函数. 从而, 在 $n > 3$ 时, 总可将 \mathbf{T} 按角动量分量展开为如下分波振幅 $a_\ell(E)$,

$$\mathbf{T}(E, \theta) = \lambda_n E^{4-n} \sum \frac{1}{N_\ell^\nu} C_\ell^\nu(1) C_\ell^\nu(\cos \theta) a_\ell(E), \quad (3.12)$$

其中,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= 2(16\pi)^{(n/2)-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right), \\ \nu &= (n-3)/2, \\ N_\ell^\nu &= \frac{\pi\Gamma(\ell+2\nu)}{2^{2\nu-1}\ell!(\ell+\nu)\Gamma^2(\nu)},\end{aligned}\tag{3.13}$$

而 $C_\ell^\nu(x)$ 是 ν 阶 (order) ℓ 度 (degree) 的 Gegenbauer 多项式 (见 [104] 中 22.2 节). 由此, 可从 $\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = 2\text{Im}\mathcal{T}$ 导出弹性散射分波振幅 $a_\ell^{(\text{el})}$ 和非弹性散射分波振幅 $a_\ell^{(\text{inel})}$ 的么正性条件为,

$$|\text{Re } a_\ell^{(\text{el})}| \leq \frac{\rho_e}{2}, \quad |a_\ell^{(\text{el})}| \leq \rho_e, \quad |a_\ell^{(\text{inel})}| \leq \frac{\sqrt{\rho_i\rho_e}}{2},\tag{3.14}$$

其中 ρ_e 与 ρ_i 分别为弹性散射与非弹性散射末态的全同性对称因子. 对于 $2 \rightarrow 2$ 散射, 若末态两粒子全同, 则该因子为 2, 否则即为 1. 以上么正性条件 (3.14) 的详细推导见附录 A.

虽然么正性条件 (3.14) 不依赖于时空维数, 但分波振幅的表达式和时空维数有关. 对于 $n > 3$ 维时空, ℓ -分波 a_ℓ 的表达式为,

$$\begin{aligned}a_\ell(E) &= \frac{E^{n-4}}{2(16\pi)^{(n/2)-1}\Gamma(\frac{n}{2}-1)C_\ell^{(n-3)/2}(1)} \\ &\times \int_0^\pi d\theta \sin^{n-3}\theta C_\ell^{(n-3)/2}(\cos\theta)\mathbf{T}(E,\theta).\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中, 因子 E^{n-4} 是容易理解的, 因为 n 维时空中的 $2 \rightarrow 2$ 散射的 S 矩阵有量纲 $4-n$, 而分波振幅按定义是无量纲的.

对于 $n \leq 3$ 维时空, 需要另行处理, 因为此时 Gegenbauer 多项式 $C_\ell^{(n-3)/2}(x)$ 恒为零. 事实上, $n=3$ 维时空中分波展开的本征函数即为 $e^{i\ell\theta}$, 从而在 3 维时空 中, 散射振幅 \mathbf{T} 与分波振幅 a_ℓ 的关系为,

$$\mathbf{T}(E,\theta) = 8E \sum_\ell e^{i\ell\theta} a_\ell(E),\tag{3.16a}$$

$$a_\ell(E) = \frac{1}{16\pi E} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\ell\theta} \mathbf{T}(E,\theta).\tag{3.16b}$$

对于时空维数 $2 \leq n < 3$, 散射角无意义, 因而无需定义分波展开. 或者说, 此时非零的分波振幅只有 s 分波 a_0 , 它可被定义为,

$$a_0(E) = \frac{E^{n-4}}{4^{n-1}\pi^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})} [\mathbf{T}(E,0) + \mathbf{T}(E,\pi)], \quad (2 \leq n < 3)\tag{3.17}$$

以上 (3.16) 和 (3.17) 中, 已适当选取系数, 使得其结果与 (3.15) 中 a_0 解析延拓到 $n \leq 3$ 的结果相同.

现在，我们将幺正性条件(3.14)应用于无Higgs玻色子的标准模型散射振幅(3.11)，可得，在 $n=4$ 时对散射能量的幺正性条件为 $E < 1.74\text{TeV}$ ，在 $n=3$ 时的幺正性条件为 $E < 6.02\text{TeV}$ ，而对于 $n=2$ ，可得 $a_0 = \tilde{g}^2/8$ ，因而总满足幺正性条件 $|a_0| \leq 1$ ，亦即对散射能量无限制。对于 $1+1$ 维时空这是容易预料的。此结果说明，如若SDR在无Higgs的标准模型中负责弱规范玻色子散射振幅的幺正化，则其出现的尺度应在 $\mathcal{O}(\text{TeV})$ 。在加入Higgs粒子后，此尺度可以更高，因为此时Higgs粒子已经部分地起到了幺正化的作用，而SDR可用来幺正化剩余的由反常耦合导致的非幺正行为。

除了 $WW \rightarrow ZZ$ 过程外，还可考虑 $WW \rightarrow WW$ 散射。通过对这两者联合作耦合道分析(coupled-channel analysis)，可得到对散射能量 E 更强的幺正性限制。同样，在删去Higgs粒子的情形下，可求得 $W_L^+ W_L^- \rightarrow W_L^+ W_L^-$ 的振幅为，

$$\mathbf{T}_{\text{HL}}(W_L^+ W_L^- \rightarrow W_L^+ W_L^-) = \frac{g^2 E^2}{8 M_W^2} (1 + \cos \theta) + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.18)$$

由此，联合(3.11)，可得以归一化的 $|W_L^+ W_L^- \rangle$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2}}|Z_L^0 Z_L^0 \rangle$ 为初末态的散射振幅为，

$$\mathbf{T}_{\text{coup}} = \frac{g^2 E^2}{8 M_W^2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

而其在 n 维时空中的 s 波分波振幅为，

$$a_0^{\text{coup}} = \frac{\tilde{g}^2}{2^{n+2} \pi^{(n-3)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{E}{2 M_W} \right)^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

为得到最严格的幺正性限制，应将幺正性条件应用于此分波振幅最大的本征值上，即，

$$|a_0^{\text{max}}| = \frac{\tilde{g}^2}{2^{n+1} \pi^{(n-3)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{E}{2 M_W} \right)^{n-2} \leq 1, \quad (3.21)$$

从而可得到对散射能量 E 的限制。作为两个例子，我们使用(3.2)中的维数流 $n=n(\mu)$ ，在图3.2(a)和(b)中分别展示取 $\gamma=2$ 和 $\gamma=1.5$ ，以及 $\Lambda_{\text{SDR}}=(4, 5, 6)\text{TeV}$ ，以展示(3.21)的分波振幅及其幺正性条件，从中可明显看到SDR对弱规范玻色子散射振幅幺正性的改善。

在手征有效理论的研究中，亦有人为的幺正化方法。这里举 K -矩阵(K -matrix)与Padé[105–108]两个例子，同SDR的幺正化作比较。按照这两种方法，我们需计算分波振幅至 $\mathcal{O}(E^4)$ 阶(来自一圈图)，然后将 E^2 阶的分波 $a^{(2)}$ 和 E^4 阶的分波 $a^{(4)}$ 重求和。对于 K -矩阵，重求和为，

$$a_K(E) = \frac{a^{(2)} + \text{Re } a^{(4)}}{1 - i(a^{(2)} + \text{Re } a^{(4)})}, \quad (3.22)$$

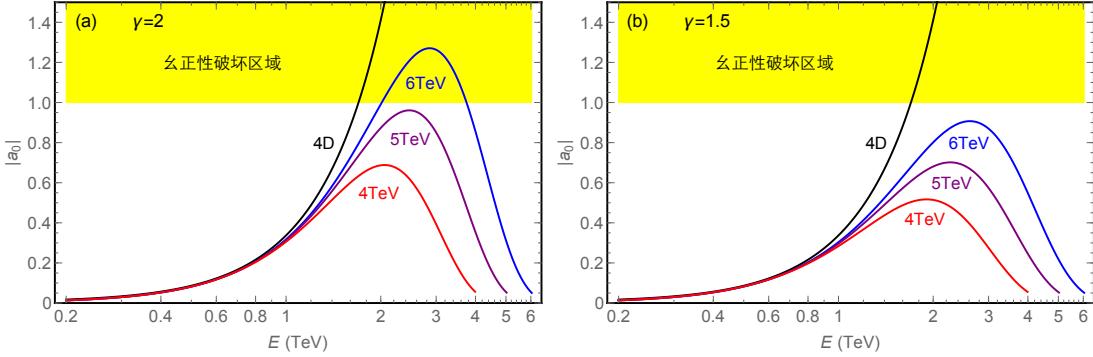


图 3.2 无 Higgs 标准模型弱规范玻色子散射 s 分波 a_0 作为散射能量 E 的函数. 其中, (a) 和 (b) 分别取 $\gamma = 2$ 与 $\gamma = 1.5$. 黑色曲线对应于 $3 + 1$ 维理论的结果, 而蓝、紫、红色曲线分别对应于加入 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)$ TeV 的 SDR 效应的结果. 黄色阴影对应于破坏幺正性条件 $|a_0| < 1$ 的区域.

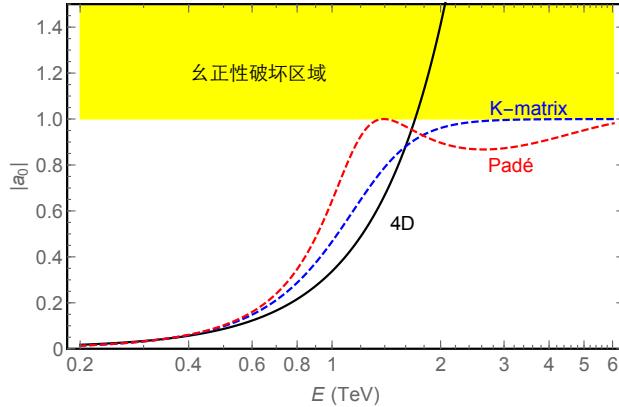


图 3.3 无 Higgs 标准模型弱规范玻色子散射 s 分波 a_0 作为散射能量 E 的函数. 其中, 黑色曲线对应于 $3 + 1$ 维理论的结果, 而蓝色和红色虚曲线分别对应于 K -矩阵和 Padé 方法的结果. 黄色阴影对应于破坏幺正性条件 $|a_0| < 1$ 的区域.

而对于 Padé 则为,

$$a_P(E) = \frac{a^{(2)}}{1 - (a^{(4)}/a^{(2)})}. \quad (3.23)$$

我们将这两种方法给出的幺正化的分波振幅列入图 3.3, 以同 SDR 方法的结果 (图 3.2) 比较. 当然, 这两种方法只是人为的重求和, 其背后并无物理的机制.

3.1.3 TeV 尺度 SDR 下的纵向玻色子散射截面

作为上文所述有效理论的直接应用, 本小节将以弱规范玻色子散射为例, 讨论 TeV 尺度的 SDR 效应在其散射截面上的效应. 我们将讨论如下几个将在 LHC 和未来对撞机上被测量的过程: (a) $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$; (b) $W_L^\pm Z_L^0 \rightarrow W_L^\pm Z_L^0$; (c)

$W_L^\pm W_L^\pm \rightarrow W_L^\pm W_L^\pm$. 其中, 过程 (a) 可被用于探测类 Higgs 重粒子的共振峰; 而通过过程 (b) 可探测带电的矢量玻色子, 如额外维理论 [109–111]、以及扩展规范群 [112, 113] 中的 W_1^\pm 粒子、或者彩色 (technicolor) 模型中的“彩色” ρ^\pm 粒子 (techni- ρ) 的共振峰 [114]; 过程 (c) 可被用于探测带双电荷的标量粒子的共振峰 [115, 116]. SDR 与此类新物理模型有两种重要区别, 一是, SDR 不产生新的共振峰, 因为其中并不包含新的粒子; 二是, SDR 对弱规范玻色子散射的影响与散射道无关, 这是由于引力效应只敏感于物质场的质量、自旋等涉及时空对称性的性质, 而对于内部对称性 (如规范对称性) 没有感知.

为计算以上过程在 SDR 下的散射截面, 需要特别注意对末态相空间的积分, 因为 SDR 发生时, 时空维数的缩减也会同时压缩散射末态相空间. 我们将其细节置于附录 A, 在此处列出对散射截面的幺正性条件. 在通常的 $(3+1)$ 维理论中, 弹性散射截面 $\sigma^{(\text{el})}$ 与非弹性散射截面 $\sigma^{(\text{inel})}$ 的幺正性条件分别为 [27, 28],

$$\sigma^{(\text{el})} \leq \frac{16\pi\rho_e}{E^2}, \quad \sigma^{(\text{inel})} \leq \frac{4\pi\rho_e}{E^2}. \quad (3.24)$$

而在一般 n 维时空中, 附录 A 的结果说明, 以上条件须被推广为,

$$\sigma^{(\text{el})} \leq \frac{\lambda_n \rho_e}{N_0^n E^{n-2}}, \quad \sigma^{(\text{inel})} \leq \frac{\lambda_n \rho_e}{4N_0^n E^{n-2}}, \quad (3.25)$$

其中 λ_0 与 N_0^n 已在 (3.13) 中定义. 另一方面, 注意到, 在 n 维时空中, 散射截面量纲为 $(2-n)$, 而由于散射实验初末态的测量总在低能下的 4 维时空进行, 因而实验所测量的散射截面量纲总为 -2 . 由此知, 以上幺正性条件中的 n 维散射截面 σ 与实验测量的散射截面 σ_{exp} 之间应由以下条件相联系,

$$\sigma_{\text{exp}} = \sigma E^{n-4}, \quad (3.26)$$

其中 E 为散射的质心系能量.

我们仍然首先考虑删去 Higgs 玻色子的标准模型, 然后再考虑包含 Higgs 粒子的模型.

图 3.4 展示了除去 Higgs 场的标准模型的弱规范玻色子散射截面. 其中, 图 (a)、(b)、(c) 分别对应于上文提到的三种散射过程, 而图 (d) 则展示了 K-Matrix 和 Padé 两种幺正化方法的结果. 每张图中, 列出了 $(3+1)$ 维无 Higgs 场的标准模型、以及分别包含 125GeV 与 600GeV 的 Higgs 玻色子的标准模型. 在图 3.4(a)-(c) 中, 使用了由 (3.2) 式给出的维数流, 且取 $\gamma = 1.5$, $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的结果. 由于 SDR 同时改变了对散射截面的幺正性限制, 因而我们在图 3.4(a)-(c) 中使用浅蓝色阴影标记被修改过的幺正性条件 (3.25), 而用黄色阴影标记 $(3+1)$ 维理论的幺正性条件 (3.24).

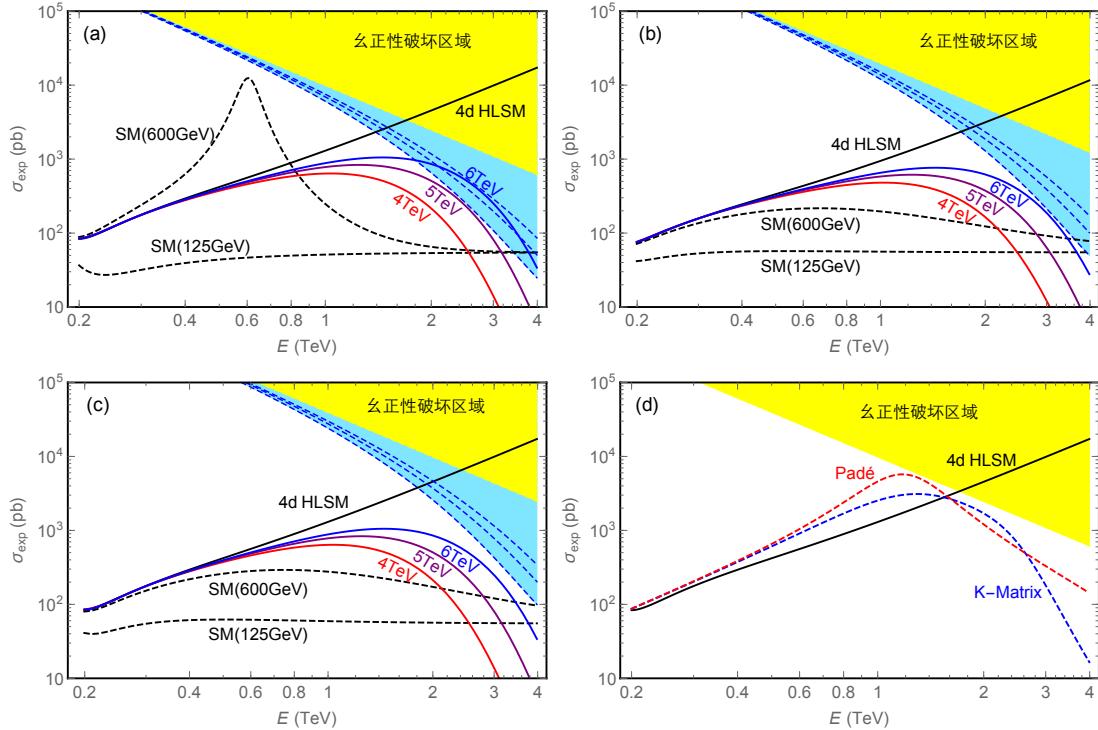


图 3.4 无 Higgs 标准模型中弱规范玻色子散射的截面. (a) 和 (d) 对应于过程 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$, (b) 为 $W_L^\pm Z_L^0 \rightarrow W_L^\pm Z_L^0$, 而 (c) 为 $W_L^\pm W_L^\pm \rightarrow W_L^\pm W_L^\pm$. 在每幅图中, 黑色曲线对应于 4 维无 Higgs 标准模型的结果, 黄色区域代表 4 维散射截面破坏幺正性条件的区域. 在图 (a),(b),(c) 中, 黑色虚线对应于包含质量为 $(125, 600)\text{GeV}$ Higgs 玻色子的标准模型的结果, 红、紫、蓝色曲线分别对应于包含 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的 SDR 效应的无 Higgs 标准模型的结果, 浅蓝色阴影及其蓝虚线界限自下而上代表 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的 SDR 理论中幺正性破坏的区域. 在图 (d) 中, 蓝色和红色虚线分别代表无 Higgs 标准模型在 K -矩阵和 Padé 夸正化下的结果.

由图 3.4(a) 可见, 对于 4 维无 Higgs 标准模型, 由于散射振幅 (3.11) 中正比于 E^2 项的作用, 相应 $WW \rightarrow ZZ$ 的散射截面 (黑色实线) 随能量的上升而增大, 在 $\sim 2\text{TeV}$ 的位置处即破坏幺正性条件 (黄色阴影); 与之相对, 在包含 Higgs 粒子后 (黑色虚线), 散射振幅在高能下无正比于 E^2 的项, 因而相应的散射截面在高能下无随能量上升的行为. 其中, 假设的 600GeV 的 Higgs 玻色子将在散射截面上留下很宽的共振峰, 而 125GeV 的 Higgs 玻色子则无. 在加入 SDR 效应后, 即使在无 Higgs 场的情形 (红、紫、蓝色曲线), 散射截面也不破坏幺正性条件, 而是在能量较低时出现随能量上升的现象、而在接近 SDR 尺度 Λ_{SDR} 时, 由于末态相空间的压缩而立即下降. 其总的效果是形成了很宽的隆起. 在图 3.4(b) 和 3.4(c) 中亦可见到类似的隆起, 这说明 SDR 效应独立于散射道, 在每一种过程中皆表现出相似的行为.

现在我们讨论在以上无 Higgs 的标准模型中加入 Higgs 玻色子的情形, 即由 (3.7) 所描写的理论. 在标准模型中, (3.7) 式中 $\kappa = \kappa' = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = M_h^2/(2v^2)$. 然而, 当 SDR 效应出现在 TeV 尺度时, 量子引力效应可使这些耦合常数偏离它们的标准模型值. 通过弱规范玻色子散射, 可探测 κ 和 κ' 对 1 的偏离. 因而可定义 $\Delta\kappa \equiv \kappa - 1$ 和 $\Delta\kappa' \equiv \kappa' - 1$, 以刻画规范粒子与 Higgs 玻色子的反常耦合. 在幺正规范下, 可由 (3.7) 得到 Higgs 玻色子与规范玻色子的反常相互作用项如下,

$$\Delta\mathcal{L}_H = \left(\Delta\kappa vh + \frac{1}{2} \Delta\kappa' h^2 \right) \left(\frac{2M_W^2}{v^2} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{M_Z^2}{v^2} Z_\mu Z^\mu \right). \quad (3.27)$$

在 $\Delta\kappa, \Delta\kappa' \neq 0$ 时, 弱规范玻色子散射的振幅中仍有正比于 E^2 的项,

$$\mathbf{T}(W_L^+ W_L^- \rightarrow W_L^+ W_L^-) = (1 - \kappa^2) \frac{g^2 E^2}{8M_W^2} (1 + \cos\theta) + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{T}(W_L^+ W_L^- \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} Z_L^0 Z_L^0) = (1 - \kappa^2) \frac{g^2 E^2}{4\sqrt{2}M_W^2} + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.28b)$$

与无 Higgs 标准模型的情形类似, 仍可求出以 $|W_L^+ W_L^- \rangle$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}|Z_L^0 Z_L^0\rangle$ 为初末态的散射振幅的 s 分波矩阵如下,

$$a_0 = \frac{(1 - \kappa^2)\tilde{g}^2}{2^{n+2}\pi^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{E}{2M_W} \right)^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

其最大的本征值为,

$$|a_0^{\max}| = \frac{(1 - \kappa^2)\tilde{g}^2}{2^{n+1}\pi^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{E}{2M_W} \right)^{n-2}. \quad (3.30)$$

从而, 由幺正性条件 $|a_0^{\max}| \leq 1$, 可以得到对反常耦合 $\Delta\kappa$ 的幺正性条件作为散射能量 E 的函数, 如图 3.5 所示. 其中, 我们已取 Higgs 质量 $M_h = 125\text{GeV}$.

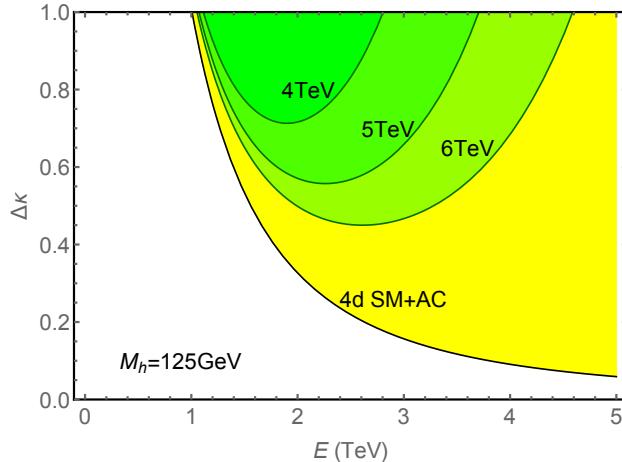


图 3.5 反常耦合 $\Delta\kappa$ 的幺正性限制作为散射能量 E 的函数. 黄色阴影对应于 4 维理论的幺正性破坏区域, 而由深至浅的绿色阴影对应于包含 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的 SDR 效应的幺正性破坏区域.

对于包含 SDR 效应的幺正性条件, 仍使用 (3.2) 的维数流, 且取 $\gamma = 1.5$ 以及 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$. 由图可见, SDR 效应可减轻对反常耦合 $\Delta\kappa$ 的幺正性限制, 因为 SDR 本身已经对散射振幅起到了部分的幺正化作用.

由以上结果, 亦可计算包含反常耦合的 SDR 模型中弱规范玻色子散射的截面, 结果如图 3.6 所示. 从中可清楚地看到由反常耦合所产生的 E^2 项在高能时对散射截面的抬高与幺正性破坏, 也能看到 SDR 对相应的 4 维结果的幺正化. 与标准模型结果相比, 包含 SDR 效应的散射截面只是比标准模型背景略高的平台, 且只在高能 $\gtrsim 3\text{TeV}$ 时有明显的下降, 这意味着在 LHC 上的探测此种效应可能相当困难, 因而很可能需要借助未来对撞机在更高能量上进行测量.

3.1.4 讨论

本节仔细讨论了一类包含时空维数自发缩减 (SDR) 的电弱对称性破缺的有效理论, 并将其应用于研究弱规范玻色子的散射. SDR 提供了独立于 BEH 机制之外的一种新的幺正化手段, 因而当其作用于 TeV 尺度时, 可参与到电弱对称性自发破缺中. 虽然这种破缺机制的细节依赖于具体的量子引力模型, 但在有效理论的截断尺度 Λ_{SDR} 之下, 可用本节所发展的方法处理之. 这种方法的优点在于, 只提取 SDR 中标度变换的信息, 因而可得到独立于量子力学模型的普遍结果.

文献中亦在更具体的模型中讨论过类似的时空维数缩减的对撞机效应和宇宙学效应, 例如额外维模型和渐进安全模型在对撞机上的信号 [117–121], 维数缩减的格点模型在对撞机上的信号 [122, 123], 以及维数缩减对原初引力波的影响 [124].

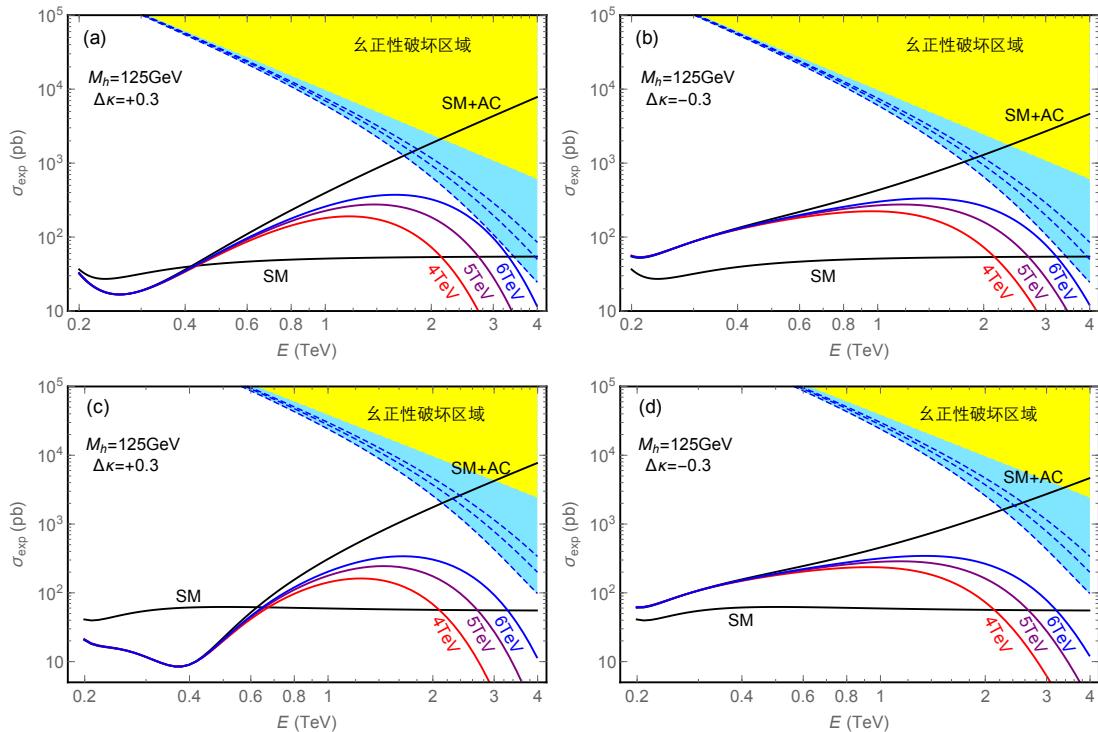


图 3.6 包含反常耦合 $\Delta\kappa$ 的标准模型中弱规范玻色子散射的截面. (a) 和 (b) 对应于过程 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$, (c) 和 (d) 对应于过程 $W_L^\pm W_L^\pm \rightarrow W_L^\pm W_L^\pm$. (a) 与 (c) 中 $\Delta\kappa = +0.3$, 而 (b) 与 (d) 中 $\Delta\kappa = -0.3$. 在每幅图中, 由 SM+AC 标记的黑色曲线对应于加入反常耦合的 4 维理论, 而红、紫、蓝色曲线分别对应于进一步加入 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的 SDR 效果的结果. 黄色区域代表 4 维散射截面破坏幺正性条件的区域, 浅蓝色阴影及其蓝虚线界限自下而上代表 $\Lambda_{\text{SDR}} = (4, 5, 6)\text{TeV}$ 的 SDR 理论中幺正性破坏的区域.

亦有文献考虑过维数缩减在暴胀时期的后果^[125]. 在本文 5.3 节, 我们也将介绍一种由渐进安全量子引力实现的暴胀模型^[126].

TeV 尺度 SDR 效应的一个可能的问题在于 Lorentz 破坏. 在我们的模型中, Lorentz 破坏来源于时空积分测度 $d^n x$ 的定义. 更一般地, Lorentz 破坏应普遍地存在于各种量子引力模型中. 目前, 已有许多试图寻找 Lorentz 破坏的实验的观测^[127], 其中对光子色散的观测所给出的 Lorentz 破缺尺度的下限甚至比 Planck 尺度还高出许多量级^[128]. 但是这类结果与本节的模型并不冲突, 这一方面是因为此类测量通常需假设特定的 Lorentz 破缺的形式 (例如, 对光子色散关系的修改的形式), 因而似缺乏普遍的意义 (比如, 也许不能覆盖 Lorentz 对称性非线性实现的可能性), 而另一方面则是由于本节的有效理论中, 拉格朗日量仍然构造于 4 维时空, 因而光子的色散关系, 至少在树图阶, 并不破坏 Lorentz 对称性.

最后, 关于 4 维的一般么正量子场论, 有著名的 a 定理^[129, 130]断言粒子的谱密度是能量尺度的单增函数, 因而, 由 SDR 效应对粒子相空间在紫外的压缩似乎与 a 定理相悖. 然而, a 定理的证明严重依赖于时空维数, 且须假设 Lorentz 对称性. 在 SDR 起作用的能量区域, 时空维数已经发生改变, 且 Lorentz 对称性在紫外亦被破坏, 因而 a 定理的结论亦不再适用.

3.2 Higgs 场与引力的非最小耦合

本节仔细研究标准模型的 Higgs 场 H 与引力的量纲为 4 的非最小耦合 $\mathcal{R}H^\dagger H$. 如 2.2 节所述, 这是标准模型中各场与引力的直到量纲为 4 阶的唯一非最小耦合项. 同时, 标准模型的任何对称性都不禁戒此项, 因此在有效场论的框架下, 此项不可避免.

3.2.1 Jordan 系与 Einstein 系

我们首先写下包含非最小耦合的标准模型电弱部分 (Higgs 场与电弱规范场) 的作用量,

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g^{(J)}} \left[\left(\frac{1}{2} M^2 + \xi H^\dagger H \right) \mathcal{R}^{(J)} - \frac{1}{4} \sum_j F_{j\mu\nu}^a F_j^{\mu\nu a} + (\mathbf{D}_\mu H)^\dagger (\mathbf{D}^\mu H) - V(H) \right], \quad (3.31)$$

其中 $F_{j\mu\nu}^a = (W^{a\mu\nu}, B^{\mu\nu})$ 为电弱 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 规范场的协变场强, 而 Higgs 势由 (2.5) 给出. 这里的指标 (J) 意指此作用量中的度规及其导出量都是 Jordan 系 (Jordan frame) 中的量. 依定义, Jordan 系即指包含非最小耦合的作用量所依赖的

时空度规. 在此系中, 引力场的方程并非 Einstein 场方程, 因为非最小耦合项引入了额外的修正, 使得场方程取如下的形式,

$$\left[\left(\mathcal{R}_{\mu\nu}^{(J)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(J)} \mathcal{R}^{(J)} \right) - \left(g_{\mu\nu}^{(J)} \nabla_\lambda \nabla^\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \right) \right] \Omega^2(H) = -M_p^{-2} T_{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

其中 $\Omega^2 \equiv (M^2 + 2\xi H^\dagger H)/M_p^2$, 协变导数 ∇_μ 按 Jordan 系的度规定义. 为使引力部分具有和广义相对论相同的形式, 可对度规 $g_{\mu\nu}^{(J)}$ 作 Weyl 变换^①如下,

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(H) g_{\mu\nu}^{(J)}, \quad (3.33)$$

这里, 等式左边不带 (J) 上标的度规 $g_{\mu\nu}$ 被称为 Einstein 系中的度规, 因为它的运动方程具有与广义相对论的 Einstein 场方程 (2.14) 相同的形式. 为理解之, 我们将作用量 (3.31) 用 Einstein 系的变量重新表出如下,

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} - \frac{1}{4} \sum_j F_{j\mu\nu}^a F_j^{\mu\nu a} + \frac{3\xi^2}{M_p^2 \Omega^4} (\nabla_\mu (H^\dagger H))^2 + \frac{1}{\Omega^2} (\mathbf{D}_\mu H)^\dagger (\mathbf{D}^\mu H) - \frac{1}{\Omega^4} V(H) \right], \quad (3.34)$$

其中用到了 Weyl 变换 $\sqrt{-g^{(J)}} = \Omega^{-4} \sqrt{-g}$, $g^{(J)\mu\nu} = \Omega^2 g^{\mu\nu}$, 以及,

$$\mathcal{R}^{(J)} = \Omega^2 \left[\mathcal{R} - 6g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \log \Omega + 6g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega)(\nabla_\nu \log \Omega) \right], \quad (3.35)$$

其中协变导数 ∇_μ 按 Einstein 系的度规计算. 在 Einstein 系作用量 (3.34) 中, 引力项具有标准的 Einstein-Hilbert 形式, 因此其运动方程即为 Einstein 场方程. 但是与此同时, Higgs 标量场 H 的动能项与势能项都被修改. 值得注意的是, 规范场的作用量是 Weyl 不变的.

Weyl 变换可被看作场变量的重定义. 这种对变量的重新命名原则上应该不会影响到可观测的物理, 因此在实际计算中选取 Jordan 系或 Einstein 系似乎只关乎个人的喜好. 然而实际情况远为复杂. 因为, 在广义相对论中, 度规是具有几何意义的物理量, 即使其中存在非物理的、对应于广义坐标变换的规范自由度, 实际的可观测量也可能依赖于度规的选取. 这一点与平空间中量子场论的散射过程很不同. 在后者, 有量子场论中为人熟知的定理^[10,11]保证场的重定义不会改变 S 矩阵元. 因此, Jordan 系和 Einstein 系的关系, 特别是它们在具体的物理问题中的(不)等价性, 是很复杂的问题^[132]. 我们将在 4.4 节讨论 Higgs 暴胀的量子修正时, 涉及此问题的一个具体的部分.

为研究非最小耦合项 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 在散射过程中的效应, 需要对作用量按分量展开. 以下, 我们分别处理 Jordan 系和 Einstein 系的作用量.

^①在引力文献中, Weyl 变换常被称为共形变换. 我们避免这种用法, 因为共形变换也被用作(共形)平空间中保持度规相差一常数的坐标变换. 而此处的 Weyl 变换是对度规场的重新定义, 不是坐标变换. 在平空间极限下, Weyl 对称性可退化为共形对称性, 但反之不然. 相关讨论可见 [131].

Jordan 系中的相互作用 首先, 考虑 Jordan 系作用量 (3.31). 将 Higgs 场的分量形式 $H = (\pi^+, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + v + i\pi^0))^T$ 代入其中, 可得与引力场动能项有关的部分如下,

$$\sqrt{-g^{(J)}} \left(\frac{1}{2} M^2 + \xi H^\dagger H \right) \mathcal{R}^{(J)} \supset \frac{1}{2} \sqrt{-g} (M^2 + \xi v^2) \mathcal{R}^{(J)}. \quad (3.36)$$

为了在低能得到正确的 Newton 引力常数, 我们取 $M^2 + \xi v^2 = M_p^2$. 在 Jordan 系中, 引力子对弱规范玻色子的散射有重要贡献. 因此, 我们依照 2.2 节的讨论, 将以上作用量在平空间背景上展开, $g_{\mu\nu}^{(J)} = \eta_{\mu\nu} + \kappa \tilde{h}_{\mu\nu}$. 这里, 我们用 $\tilde{h}_{\mu\nu}$ 记度规的涨落, 是因为在 Jordan 系作用量的展开式中, 除了标准的 $\tilde{h}_{\mu\nu}$ 的二次项 (2.15) 之外, 引力和 Higgs 场还有线性的混合. 事实上,

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g^{(J)}} \left[\left(\frac{1}{2} M^2 + \xi H^\dagger H \right) \mathcal{R}^{(J)} + (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) \right] \\ & \supset \frac{1}{4} \left(\tilde{h} \square \tilde{h} - \tilde{h}_{\mu\nu} \square \tilde{h}^{\mu\nu} + 2\tilde{h}_{\mu\lambda} \partial^\mu \partial_\nu \tilde{h}^{\nu\lambda} - 2\tilde{h} \partial^\mu \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \tilde{\phi} \square \tilde{\phi} + \xi \kappa v \tilde{\phi} (\square \tilde{h} - \partial^\mu \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中 $h \equiv h_\mu^\mu$. 为消去上式中最后的混合项, 我们定义另一组正则归一化的度规涨落场 $h_{\mu\nu}$ 和 Higgs 中性分量 ϕ 如下,

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \xi \kappa v \zeta \phi, \quad \tilde{\phi} = \zeta \phi, \quad (3.38)$$

其中,

$$\zeta \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + 3(\xi \kappa v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 6\xi^2 v^2 / M_p^2}}. \quad (3.39)$$

现在, $h_{\mu\nu}$ 和 ϕ 的动能项是正则归一化的. 注意到, 以上场定义 (3.38) 导致 Higgs 场 ϕ 与所有标准模型粒子的耦合都被 $\zeta < 1$ 重新标度, 因而被压低; 另一方面, 由于正则归一化的引力子场 $h_{\mu\nu}$ 中混进了 Higgs 场 ϕ 的成分, 因此 Higgs 场与其他场的耦合将获得由引力贡献的新的相互作用项. 这些新的相互作用项在领头阶来自正比于引力子场 $h_{\mu\nu}$ 的部分, 而引力子场又耦合到物质场的能动张量上. 因而, 可写出这些新的相互作用项如下,

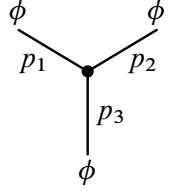
$$\Delta \mathcal{L}_{\text{int.}}^{h\phi} = \kappa (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \xi \kappa v \zeta \phi) T^{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

其中物质场的能动张量 $T^{\mu\nu}$ 为,

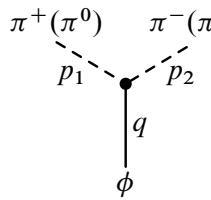
$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \sum_j \left(F_j^{\mu\lambda a} F_{j\lambda}^{\nu a} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{j\rho\sigma}^a F_j^{\rho\sigma a} \right) + m_W^2 \left(W^{\mu a} W^{\nu a} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} W_\lambda^a W^{\lambda a} \right) \\ & + \partial^\mu \pi^a \partial^\nu \pi^a + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[(\partial_\lambda \pi^a)^2 + (\partial_\lambda \phi)^2 - m_W^2 \pi^a \pi^a - m_\phi^2 \phi^2 \right] \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (3.41)$$

其中省略的部分包括势能项中除质量项之外的项、规范固定项与鬼项。这些省略的项对下文计算皆无贡献。此外，在下文计算中，如同3.1节，亦取电弱混合角 $\theta_W = 0$ 。

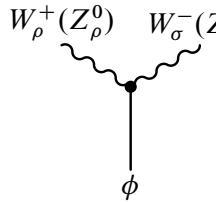
我们将以上所得的新的相互作用项总结为以下 Feynman 规则，其中所有动量都向内指向顶点。



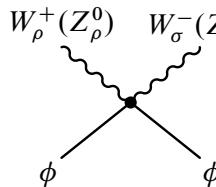
$$= -i6\zeta^3\lambda v + \zeta^3\left(-\frac{i\xi v}{M_P^2} + \frac{i6\xi^2 v}{M_P^2}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \quad (3.42a)$$



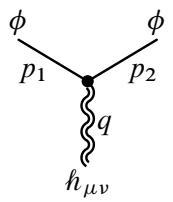
$$= -i2\lambda\xi v + \frac{i2\xi\xi v}{M_P^2}(p_1 \cdot p_2) + \frac{i6\xi^2\xi v}{M_P^2}q^2, \quad (3.42b)$$



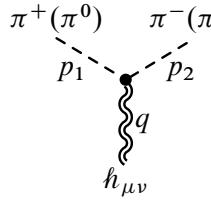
$$= \frac{i2m_{W(Z)}^2}{v}\left(1 - \frac{\xi v^2}{M_P^2}\right)\xi\eta^{\rho\sigma}, \quad (3.42c)$$



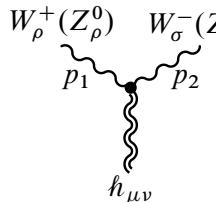
$$= \frac{i2m_{W(Z)}^2}{v^2}\left(1 - \frac{4\xi v^2}{M_P^2}\right)\xi^2\eta^{\rho\sigma}, \quad (3.42d)$$



$$= \frac{i\sqrt{2}}{M_P}\xi^2\left[\xi(q^\mu q^\nu - q^2\eta^{\mu\nu}) + (p_1^{(\mu} p_2^{\nu)} - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_2\eta^{\mu\nu})\right], \quad (3.42e)$$



$$= \frac{i\sqrt{2}}{M_P}\left[\xi(q^\mu q^\nu - q^2\eta^{\mu\nu}) + (p_1^{(\mu} p_2^{\nu)} - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_2\eta^{\mu\nu})\right], \quad (3.42f)$$



$$\begin{aligned} &= -\frac{i\sqrt{2}}{M_P}\left[p_1^{(\mu} p_2^{\nu)}\eta^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}p_1^\sigma p_2^\rho\eta^{\mu\nu} - p_1^\sigma p_2^{(\nu}\eta^{\mu)\rho} - p_2^\rho p_1^{(\mu}\eta^{\nu)\sigma}\right. \\ &\quad \left.+ (p_1 \cdot p_2 + m_{W,Z}^2)(\eta^{\rho(\mu}\eta^{\nu)\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma})\right]. \end{aligned} \quad (3.42g)$$

Einstein 系中的相互作用 现在讨论 Einstein 系. 我们的起点是作用量 (3.34). 此时引力子场 $h_{\mu\nu}$ 是正则归一的, 而 Higgs 场 ϕ 的动能项则有高阶修正. 我们写出 H 中各分量的动能项如下,

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} \left[\frac{3\xi^2}{M_p^2 \Omega^4} (\nabla_\mu (H^\dagger H))^2 + \frac{1}{\Omega^2} (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) \right] \\ & \supset \frac{1}{2} \left(1 + \frac{6\xi^2 v^2}{M_p^2} \right) (\partial_\mu \tilde{\phi})^2 + \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^0)^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

为了得到正则归一的动能项, 须对 $\tilde{\phi}$ 作重定义 $\tilde{\phi} = \zeta \phi$, 这里 ζ 亦由 (3.39) 定义. 由此可见, 在 Einstein 系中, Higgs 场 ϕ 与所有标准模型粒子的耦合也被 ζ 因子压低, 这一点与 Jordan 系相同. 但是, 由于引力在 Einstein 系中最小耦合到物质场, 在下文所关注的散射过程中不贡献正比于 ξ 的项, 因而可被略去. 这是在 Einstein 系中做计算的优点之一.

除了 Higgs 场 ϕ 的动能项被修改, Einstein 系中还有 Weyl 变换导致的 Higgs 场的高阶相互作用. 此处我们列出所有直到 M_p^{-2} 阶、含有 ξ 的新相互作用项如下. 首先是标量场间的相互作用,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{ss} = & -\frac{\xi}{2M_p^2} \left(|\partial_\mu \pi|^2 + \zeta^2 (\partial_\mu \phi)^2 \right) \left(|\pi|^2 + \zeta^2 \phi^2 + 2v \zeta \phi \right) \\ & - \frac{3\xi^2}{4M_p^2} \left(|\pi|^2 + \zeta^2 \phi^2 + 2v \zeta \phi \right) \partial^2 \left(|\pi|^2 + \zeta^2 \phi^2 + 2v \zeta \phi \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

其中 $|\pi|^2 \equiv 2\pi^+ \pi^- + (\pi^0)^2$, $|\partial_\mu \pi|^2 \equiv 2\partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- + (\partial_\mu \pi^0)^2$. 其次是标量场与规范场间的相互作用, 它们来自标量场动能项的协变导数, 可列之如下,

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{\phi g} = (2m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + m_Z^2 Z_\mu^2) \left[\left(1 - \frac{\xi v^2}{M_p^2} \right) \frac{\zeta}{v} \phi + \left(1 - \frac{5\xi v^2}{M_p^2} \right) \frac{\zeta^2}{2v^2} \phi^2 \right]. \quad (3.45)$$

最后, 完整起见, 我们也简要讨论 Dirac 费米场. 根据 2.2 节介绍的标架方法, 在一般弯曲空间下, Dirac 旋量 Ψ 的作用量可写为,

$$S = \int d^4x \det(e_\nu^q) \bar{\Psi} \gamma^p e_p^\mu \left(i\partial_\mu - \frac{1}{2} \omega_\mu^{mn} \sigma_{mn} \right) \Psi. \quad (3.46)$$

若取 Einstein 系的度规为平坦度规, 即 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 则定义以上作用量的 Jordan 系的度规为 $g_{\mu\nu}^{(J)} = \Omega^{-2} \eta_{\mu\nu}$. 于是, 相应的标架场 e_μ^m 和自旋联络 ω_μ^{mn} 为,

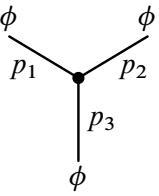
$$e_\mu^m = \Omega^{-1} \delta_\mu^m, \quad \omega_\mu^{mn} = -\Omega^{-1} (\delta_\mu^m \partial^n \Omega - \delta_\mu^n \partial^m \Omega). \quad (3.47)$$

由此, 旋量场 Ψ 的动能项成为,

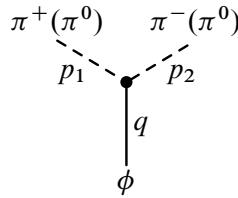
$$\mathcal{L}_{\text{kin.}}^\Psi = \frac{i}{\Omega^3} \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + \frac{3i}{\Omega^4} \bar{\Psi} (\not{\partial} \Omega) \Psi. \quad (3.48)$$

因而，旋量场的动能项也通过 Ω 因子接受非最小耦合项的修正。当按 M_p^2 展开时，在 M_p^{-2} 阶，旋量场与标量场的耦合项至多只有正比于 ξ 的项。因此在 $\xi \gg 1$ 的情形下，相对于标量自相互作用的修正 ($\propto \xi^2$)，非最小耦合对对旋量场耦合的修正较小。因此，下文着重研究非最小耦合项对弱规范玻色子散射的影响。

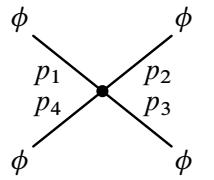
最后，如同 Jordan 系部分的讨论，我们亦将以上 Einstein 系中新出现的相互作用项总结为如下 Feynman 规则，以供后文计算之用。其中，各动量仍然向内指向顶点。



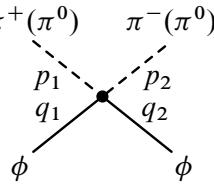
$$= -i6\xi^3\lambda v + \xi^3 \left(-\frac{i\xi v}{M_p^2} + \frac{i6\xi^2 v}{M_p^2} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad (3.49a)$$



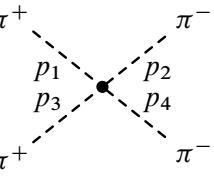
$$= -i2\lambda\xi v + \frac{i2\xi\xi v}{M_p^2} (p_1 \cdot p_2) + \frac{i6\xi^2\xi v}{M_p^2} q^2, \quad (3.49b)$$



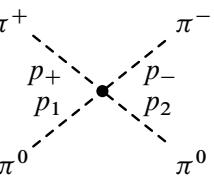
$$\begin{aligned} &= -i6\lambda\xi^4 + \frac{i2\xi\xi^4}{M_p^2} (p_1 \cdot p_2 + 5 \text{ permutations}) \\ &\quad + \frac{i3\xi^2\xi^4}{M_p^2} [(p_1 + p_2)^2 + 5 \text{ permutations}], \end{aligned} \quad (3.49c)$$



$$\begin{aligned} &= -i\lambda\xi^2 + \frac{i2\xi\xi^2}{M_p^2} (p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2) \\ &\quad + \frac{i6\xi^2\xi^2}{M_p^2} (p_1 + p_2)^2, \end{aligned} \quad (3.49d)$$



$$\begin{aligned} &= -i2\lambda - \frac{i2\xi}{M_p^2} (p_1 + p_3)^2 \\ &\quad + \frac{i6\xi^2}{M_p^2} [(p_1 + p_2)^2 + (p_1 + p_4)^2], \end{aligned} \quad (3.49e)$$



$$= -i2\lambda + \frac{2i\xi}{M_p^2} (p_+ \cdot p_- + p_1 \cdot p_2) + \frac{i6\xi^2}{M_p^2} (p_+ + p_-)^2, \quad (3.49f)$$

$$\begin{aligned} & \pi^0 \quad \quad \quad \pi^0 \\ & p_1 \quad \quad \quad p_2 \\ & p_3 \quad \quad \quad p_4 \\ & \pi^0 \quad \quad \quad \pi^0 = -i6\lambda + \frac{i2\xi}{M_p^2} (p_1 \cdot p_2 + 5 \text{ permutations}) \\ & \quad \quad \quad + \frac{i3\xi^2}{M_p^2} [(p_1 + p_2)^2 + 5 \text{ permutations}], \end{aligned} \quad (3.49g)$$

$$W_\rho^+(Z_\rho^0) \quad W_\sigma^-(Z_\sigma^0) = \frac{i 2 m_W^2 (Z)}{v} \left(1 - \frac{\xi v^2}{M_P^2} \right) \xi \eta^{\rho\sigma}, \quad (3.49h)$$

$$\begin{array}{c} W_\rho^+(Z_\rho^0) \quad W_\sigma^-(Z_\sigma^0) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \phi \qquad \phi \end{array} = \frac{i2m_W^2(Z)}{v^2} \left(1 - \frac{5\xi v^2}{M_P^2} \right) \xi^2 \eta^{\rho\sigma}. \quad (3.49i)$$

3.2.2 弱规范玻色子散射振幅与等价定理

本小节计算弱规范玻色子的散射，并利用所得的散射振幅推导对非最小耦合 ξ 的幺正性限制 [133, 134]. 我们将在 Jordan 系和 Einstein 系中分别作计算. 由于非最小耦合项引入了高阶修正，对应于拉格朗日量中表现不可重整的算子，因此它对弱规范玻色子散射振幅的贡献在领头阶可正比于散射能量 E 的平方. 在本节中，我们关心的是 $\xi \gg 1$ 的情形，此时对散射振幅有贡献的各 Feynman 图求和后将出现未消去的 E^2 项，且对此项贡献最大的部分必正比于非最小耦合 ξ 的正幂次.

在 2.1 节，我们介绍了 Goldstone 玻色子等价定理。如果此定理在包含引力非最小耦合之后仍然成立，则弱规范玻色子的散射振幅的领头项亦可通过计算相应的 Goldstone 散射振幅而得。在本节中，我们将分别计算规范玻色子散射振幅和相应的 Goldstone 振幅。通过比较两者，我们将显式验证等价定理的成立。这一验证并非平凡的重复计算。因为，至少在 Jordan 系中，非最小耦合只关乎标量场 H ，因而表面看来和纵向玻色子的散射似无关联，从而 Goldstone 定理在 Jordan 系中并不显然。实际上，在 Jordan 系中验证 Goldstone 等价定理时，需要小心地加入引力子的贡献。现在我们详细介绍之。

在散射能量 $E \ll M_p$ 时，通过简单的幂次计数可知，幺正性条件为非最小耦合 ξ 带来的上限远大于 1。因而我们将利用 $\xi \gg 1$ ，在以下计算中作适当近似。详言之，我们将只考虑正比于 E^2 的部分，并将其按 $1/M_p^2$ 的幂次展开。在一阶，我们保留 ξ^2 项和 ξ 项；而在 $1/M_p^{2n}$ ($n \geq 2$) 阶，我们只保留 ξ 的领头阶，即

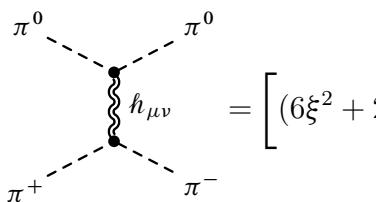
正比于 ξ^{2n} 的项.

Jordan 系中的计算 首先在 Jordan 系中计算标量粒子（包括 Higgs 玻色子和 Goldstone 玻色子）的散射振幅. 我们只考虑中性初末态，即 $|\pi^+\pi^-\rangle$ 、 $|\pi^0\pi^0\rangle$ 、 $|\pi^0\phi\rangle$ ，和 $|\phi\phi\rangle$. 利用 Jordan 系的 Feynman 规则 (3.42)，容易得到按 $1/M_p^2$ 展开的散射振幅，如表 3.2 所示. 其中，所有形如 $(\xi/M_p)^{2n}$ 的项都由 ζ 贡献，因此全部保留；同时，也保留了正比于 ξ/M_p^2 的项，在 $1/M_p^2$ 一阶它是次领头的贡献. 我们在这里保留之，为下文验证等价定理之用.

表 3.2 Jordan 系中 Goldstone 与 Higgs 玻色子中性初末态的树图散射振幅

散射过程	散射振幅
$\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right)\xi^2\right] \frac{(1 + \cos\theta)}{2v^2} E^2$
$\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$	$\left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right)\xi^2\right] \frac{E^2}{v^2}$
$\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$	$\mathcal{O}(E^0)$
$\pi^+\pi^- \rightarrow \phi\phi$	$\left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right)\xi^2\right] \xi^2 \frac{E^2}{v^2}$
$\pi^0\pi^0 \rightarrow \phi\phi$	$\left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right)\xi^2\right] \xi^2 \frac{E^2}{v^2}$
$\pi^0\phi \rightarrow \pi^0\phi$	$-\left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right)\xi^2\right] \frac{(1 - \cos\theta)}{2v^2} \xi^2 E^2$
$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$	$\mathcal{O}(E^0)$

从表 3.2 可以看出，不包含 ϕ 的三个过程有相似的形式，而包含 ϕ 的四个过程具有相似的形式. 因此，此处对这两类过程各举一例. 对于不含 ϕ 的过程，以 $\pi^+\pi^- \rightarrow 2\pi^0$ 为例. 在 $\mathcal{O}(E^2/M_p^2)$ 阶，这来自 s 道的引力子 $h_{\mu\nu}$ 和 Higgs 场 ϕ 的贡献，



$$= \left[(6\xi^2 + 2\xi) + \frac{1 - \cos^2\theta}{4} \right] \frac{E^2}{M_p^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.50a)$$

$$= -\frac{(1+6\xi)^2 \xi^2 \zeta^2 v^2}{M_P^4} E^2 + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.50b)$$

将两者求和，可得，

$$\mathbf{T}(\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0) \simeq \left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_P^2} \right) \xi^2 \right] \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.51)$$

其中只保留了所有形如 $(\xi/M_P)^{2n}$ 的项以及正比于 ξ/M_P^2 的项，并且将前者全部用 ξ^2 表出。与此类似，可计算 $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 以及 $2\pi^0 \rightarrow 2\pi^0$ 的过程。其中，前者较 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\pi^0$ 的过程多了 t 道的贡献，因而其结果正比于 $s+t=-u=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)E^2$ ，而后者由于接受全部 s,t,u 道的贡献，因而在 $\mathcal{O}(E^2)$ 阶，三者贡献相消， $s+t+u=0$ 。

对于包含 ϕ 的过程，以 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\phi$ 为例。它来自如下两部分贡献，

$$= \xi^2 \left[(6\xi^2 + 2\xi) + \frac{1 - \cos^2 \theta}{4} \right] \frac{E^2}{M_P^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.52a)$$

$$= \frac{(1 - 36\xi^2)\xi^2 \zeta^4 v^2}{M_P^4} E^2 + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.52b)$$

将两者求和，可得，

$$\mathbf{T}(\pi^+ \pi^- \rightarrow \phi \phi) \simeq \xi^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_P^2} \right) \xi^2 \right] \frac{E^2}{v^2}, \quad (3.53)$$

这里同样只保留 $(\xi/M_P)^{2n}$ 和正比于 ξ/M_P^2 的项。同理可计算其余过程。易见， $2\pi^0 \rightarrow 2\phi$ 与 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\phi$ 结果相同，而 $\pi^0 \phi \rightarrow \pi^0 \phi$ 的结果可通过 $2\pi^0 \rightarrow 2\phi$ 由交叉对称性（crossing symmetry）而得；最后， $2\phi \rightarrow 2\phi$ 的结果正比于 $s+t+u$ ，因而对 $\mathcal{O}(E^2)$ 阶无贡献。

现在计算纵向弱规范玻色子散射的振幅。与 Goldstone 振幅类似，只考虑中性初末态，即 $|W_L^+ W_L^- \rangle$ 、 $|Z_L^0 Z_L^0 \rangle$ 、 $|Z_L^0 \phi \rangle$ ，以及 $|\phi \phi \rangle$ 。利用 Feynman 规则 (3.42)，可以直接计算出所有振幅。在领头阶，不包含 ϕ 的过程（因而包含 4 个纵向玻色子外线）的结果与表 3.2 相应振幅完全相同；而包含 ϕ 的过程（因而包含 2 个纵向玻色子外线）的结果与表 3.2 相应振幅相差负号，这里的负号来自 (2.1) 中的因子

$i^2 = -1$. 于是, 这证明了 Goldstone 玻色子等价定理 (2.1) 在引入非最小耦合后仍然成立.

由于在 Jordan 系中, 加入非最小耦合项 $\xi \mathcal{R}H^\dagger H$ 在表面上并不改变规范场的作用量, 因此弱规范玻色子散射的振幅在此情况下仍与标量散射结果相同, 并非显而易见. 以下, 我们以 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$ 与 $W_L^0 W_L^0 \rightarrow 2\phi$ 为例, 讨论弱玻色子纵向散射振幅的计算.

首先考虑 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$. 在树图阶, 对该过程有贡献的 Feynman 图仍如图 3.1 所示. 容易看出, 它们与标准模型中相同的过程有类似的形式, 但其中图 3.1(d) 相应的 Feynman 规则中有来自非最小耦合的贡献. 由 (3.42), 容易得到图 3.1(d) 的贡献为,

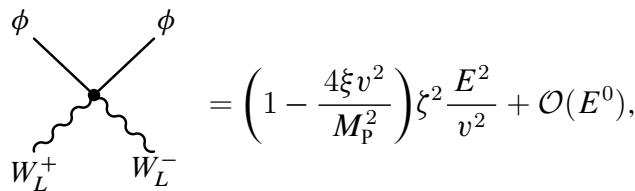
$$T_\phi^s(W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0) = -\left(1 - \frac{\xi v^2}{M_p^2}\right)^2 \frac{\xi^2 E^4}{v^2(E^2 - m_\phi^2)}, \quad (3.54)$$

其中 E 是质心系能量. 而只包含规范粒子的前三张图, 即图 3.1(a)-(c) 则与标准模型结果相同 (参见表 3.1). 于是, 将四张图的贡献求和, 可得,

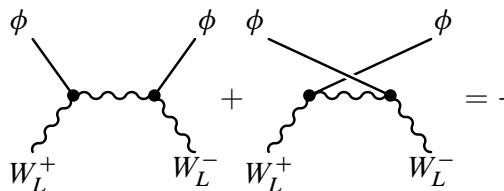
$$\begin{aligned} T(W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0) &= \left[1 - \left(1 - \frac{\xi v^2}{M_p^2}\right)^2 \xi^2\right] \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0) \\ &= \left[\frac{6\xi^2 + 2\xi}{M_p^2} - \frac{36\xi^4 v^2}{M_p^4}\right] E^2 + \mathcal{O}(E^0, M_p^{-6}), \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中最后一行保留了直至 $\mathcal{O}(\xi^4/M_p^4)$ 的项. 在 $\mathcal{O}(1/M_p^2)$ 阶, 我们也保留了次领头项 ξ , 以供下文计算比较. 在 $\xi \gg 1$ 的情形下, 对散射振幅的贡献主要来自正比于 $(\xi/M_p)^{2n}$ ($n > 0$) 的项.

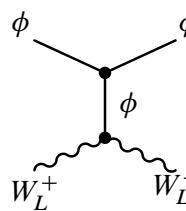
其次, 考虑 $W_L^+ W_L^- \rightarrow 2\phi$, 它来自如下 5 幅图的贡献,



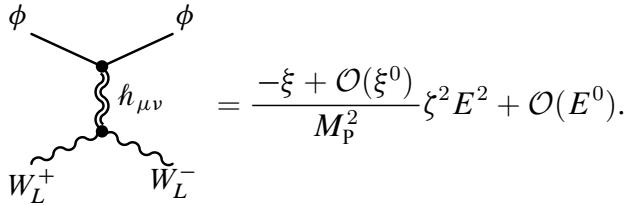
$$= \left(1 - \frac{4\xi v^2}{M_p^2}\right) \xi^2 \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.56a)$$



$$= -\left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_p^2}\right) \xi^2 \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.56b)$$



$$= \frac{-6\xi^2 + \xi}{M_p^2} \xi^4 E^2 + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.56c)$$



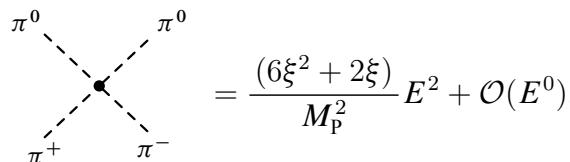
$$= \frac{-\xi + \mathcal{O}(\xi^0)}{M_p^2} \xi^2 E^2 + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.56d)$$

将以上结果求和，即有，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(W_L^+ W_L^- \rightarrow \phi\phi) &= -\xi^2 \left[1 + \frac{3\xi v^2}{M_p^2} + \left(1 + \frac{\xi v^2}{M_p^2}\right) \xi^2 \right] \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0) \\ &= -\left[\frac{6\xi^2 + 2\xi}{M_p^2} - \frac{72\xi^4 v^2}{M_p^4} \right] \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0, M_p^{-6}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

将表 3.1 中 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\pi^0$ 的振幅展开，只保留 M_p^{-2} 与 M_p^{-4} 项，所得结果与上式相差一负号，因而与使用 Goldstone 等价定理 (2.1) 的结果相同.

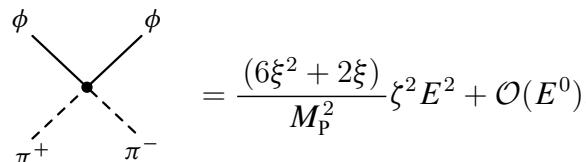
Einstein 系中的计算 根据 Einstein 系的 Feynman 规则 (3.49)，可以直接计算弱规范玻色子散射的振幅和相应的 Goldstone 振幅. 现在简要介绍之. 首先考虑 Goldstone 振幅，仍然只考虑 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\pi^0$ 和 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\phi$ 两个过程. 对于前者，比照 Jordan 系与 Einstein 系的 Feynman 规则易知，由 s 道 ϕ 场所贡献的树图在此处与 Jordan 系结果 (3.50b) 相同，但是在 Einstein 系中，无引力子 (3.50a) 的贡献，而是代之以如下过程：



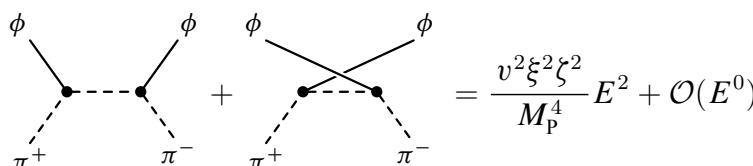
$$= \frac{(6\xi^2 + 2\xi)}{M_p^2} E^2 + \mathcal{O}(E^0). \quad (3.58)$$

在 ξ^2/M_p^2 和 ξ/M_p^2 阶，此结果与 Jordan 系中 s 道的引力子贡献 (3.50a) 完全相同，因而总的结果与 Jordan 系结果相同，即 (3.51) 式.

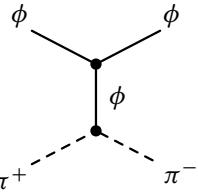
再考虑 $\pi^+ \pi^- \rightarrow 2\phi$ 过程. 在 Einstein 系中它由如下四幅图贡献，



$$= \frac{(6\xi^2 + 2\xi)}{M_p^2} \xi^2 E^2 + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.59a)$$



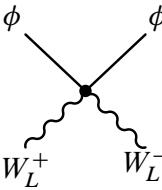
$$+ = \frac{v^2 \xi^2 \zeta^2}{M_p^4} E^2 + \mathcal{O}(E^0) \quad (3.59b)$$



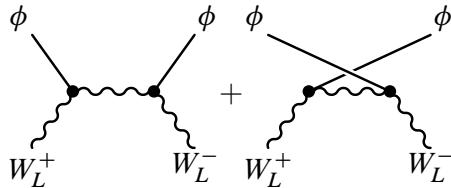
$$= \frac{(1 - 36\xi^2)\xi^2 v^2}{M_P^4} \zeta^4 E^2 + \mathcal{O}(E^0) \quad (3.59c)$$

将以上结果求和，并保留所有 $(\xi/M_P)^{2n}$ 的项和 ξ/M_P^2 ，所得结果与 (3.51) 完全相同。

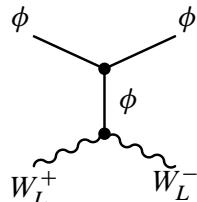
最后考虑弱规范玻色子散射 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$ 和 $W_L^+ W_L^- \rightarrow 2\phi$. 前者计算与 Jordan 完全相同，而后者由以下四幅图贡献，



$$= \left(1 - \frac{5\xi v^2}{M_P^2}\right) \xi^2 \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0), \quad (3.60a)$$



$$= -\left(1 - \frac{2\xi v^2}{M_P^2}\right) \xi^2 \frac{E^2}{v^2} + \mathcal{O}(E^0) \quad (3.60b)$$



$$= -\frac{6\xi^2 + \xi}{M_P^2} \zeta^4 E^2 + \mathcal{O}(E^0) \quad (3.60c)$$

与 Jordan 系的计算 (3.56) 相比，可见 t 道和 u 道的结果完全相同，而 Einstein 系中无引力子的贡献，与之相应的变化出现在接触相互作用的图中，这是由于该顶点的 Feynman 规则在 Jordan 系中和 Einstein 系中不相同。最后，总的结果仍与 Jordan 系结果 (3.57) 一致。

至于其余的散射过程，与 Jordan 系一样，都和以上讨论的两过程有运动学的关联，因而其结果与以上两过程具有相似的形式，此不赘述。至此，我们在 Jordan 和 Einstein 系中用四种不同的方式计算了弱规范玻色子的散射振幅，且都得到了相同的结果，同时也验证了有非最小耦合的理论中的 Goldstone 玻色子等价定理。

非最小耦合的么正性限制 利用以上结果，可得 Goldstone 玻色子和 Higgs 玻色子散射的分波振幅。我们在 3.1 节已详细讨论了 n 维时空的分波展开，即 (3.15) 式。在 4 维时空中，角动量为 ℓ 的分波振幅退化为，

$$a_\ell(E) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 d\cos\theta P_\ell(\cos\theta) \mathbf{T}(E, \theta), \quad (3.61)$$

其中 $P_\ell(\cos \theta)$ 为 ℓ 阶 Legendre 多项式. 为分析幺正性限制, 我们将散射初末态归一化, 即使用 $|\pi^+\pi^-\rangle$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}}|\pi^0\pi^0\rangle$ 、 $|\pi^0\phi\rangle$, 以及 $\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi\phi\rangle$, 其中的归一化因子 $1/\sqrt{2}$ 来自玻色子的全同性.

在耦合道分析中, 我们目前所考虑的分波振幅构成 4 阶方阵. 只取表3.2中的领头项, 即形如 $(\xi/M_P)^{2n}$ 的项, 同时忽略所有次领头项, 即 ξ/M_P^2 项, 可得 s 分波 ($\ell = 0$) 振幅矩阵如下,

$$a_0(E) = \frac{(1 - \zeta^2)E^2}{32\pi v^2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\zeta^2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \zeta^2 & 0 \\ \sqrt{2}\zeta^2 & \zeta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

此矩阵可对角化为,

$$a_0^{\text{diag}}(E) = \frac{(1 - \zeta^2)E^2}{32\pi v^2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 + 3\zeta^4} & & & \\ & 1 - \sqrt{1 + 3\zeta^4} & & \\ & & -\zeta^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

现在, 对以上各本征值应用 s 分波的幺正性条件 $|\text{Re } a_0| < 1/2$, 则对 ξ 或 E 最强的限制来自最大的本征值. 可得给定 ξ 时对散射能量 E 的限制,

$$E < \sqrt{\frac{16\pi v^2}{(1 - \zeta^2)(1 + \sqrt{1 + 3\zeta^4})}}. \quad (3.64)$$

这也可重新表为在给定散射能量 E 时对非最小耦合 ξ 的限制如下,

$$(1 - \zeta^2)(1 + \sqrt{1 + 3\zeta^4}) < \frac{16\pi v^2}{E^2}. \quad (3.65)$$

在 $\xi \ll M_P/v$ 时, 可将以上限制按 $\xi v/M_P$ 展开如下,

$$|\xi| < \frac{\sqrt{8\pi}M_P}{3E} \left[1 + \frac{4\pi v^2}{E^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v}{E}\right)^4 \right]. \quad (3.66)$$

因而, 只要 $E \gg v$, 亦即 $E \gtrsim \mathcal{O}(1\text{TeV})$, 以上展开的第一项就是好的近似. 它与简单的量纲分析所得结果 ($\propto M_P/E$) 一致, 而以上计算给出了定量的结果. 我们将此结果列如图3.7, 其中浅蓝色阴影表示破坏幺正性条件的区域. 从该图中容易看到, 在 $E \gg v$ 时, 幺正性条件近似为一条直线, 这反映了 (3.66) 中的第一项主导的特征, 即 $|\xi| < \sqrt{8\pi}M_P/(3E)$. 另一方面, 在 $E \simeq 1\text{TeV}$ 的区域, 对 ξ 的幺正性限制迅速消失. 这从物理上很好理解: 因为此时可看作 $\xi \rightarrow \infty$ 的极限, 而在此

极限下, $\xi \rightarrow 0$, 故而 Higgs 玻色子与其余所有标准模型粒子脱耦合, 因而 $\xi \rightarrow \infty$ 对应于无 Higgs 粒子的极限. 在此极限下, 以上所得的幺正性条件 (3.64) 退化为熟知的无 Higgs 粒子标准模型的幺正性限制^[3, 135] $E < \sqrt{8\pi}v$, 亦即图 3.7 中蓝色曲线在 $E \simeq 1.23\text{TeV}$ 处垂直上升的部分.

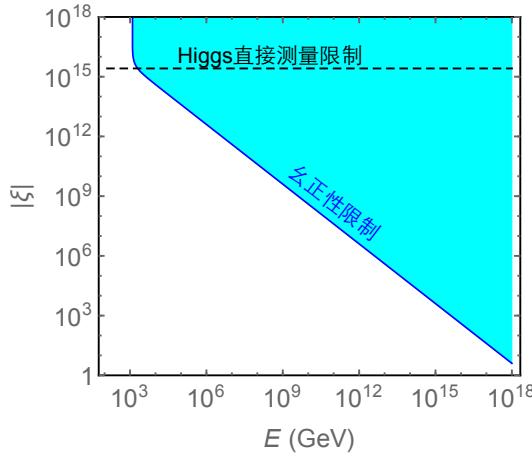


图 3.7 弱规范玻色子散射的幺正性与 LHC 的 Higgs 测量对非最小耦合 ξ 的限制. 浅蓝色阴影对应于破坏幺正性的区域, 黑色虚线是 LHC 对 Higgs 信号强度的测量结果对 ξ 的限制.

作为对比, 图 3.7 亦标示了由 LHC 测量的 Higgs 信号强度对 ξ 的限制^[136]. 简言之, 若假设标准模型成立, 则 LHC 上发现的 125GeV 的 Higgs 玻色子的信号强度应与理论预测一致. 而 $\xi \gg 1$ 导致 $\xi \ll 1$, 因此会压低 Higgs 玻色子的信号强度. 按定义, 信号强度 μ 是 Higgs 玻色子截面的观测值 $\sigma_{\text{obs.}}(i \rightarrow \phi \rightarrow f)$ 与标准模型预言值 $\sigma_{\text{SM}}(i \rightarrow \phi \rightarrow f)$ 之比, 即 $\mu = \sigma_{\text{obs.}}/\sigma_{\text{SM}}$, 其中 i 和 f 分别代表给定的初末态. 同时, 截面 $\sigma(i \rightarrow \phi \rightarrow f)$ 可表为 $\sigma(i \rightarrow \phi \rightarrow f) = \sigma(i \rightarrow \phi)\Gamma_\phi^f/\Gamma_\phi$, 其中 Γ_ϕ^f 是 ϕ 衰变到 f 的宽度, 而 Γ_ϕ 是 Higgs 玻色子的衰变总宽度. 在引入非最小耦合 ξ 后, $\sigma(i \rightarrow \phi)$ 、 Γ_ϕ^f , 与 Γ_ϕ 皆被因子 ξ^2 压低, 因而易知信号强度即为 $\mu = \xi^2$.

亦有文献计算线性化引力中各种自旋初末态的粒子散射, 以得到线性化引力理论的幺正性限制^[137, 138]. 这些计算并未考虑带有规范对称性自发破缺的情形. 本节结果在 $v \rightarrow 0$ 的极限下, 可退化到这些结果.

3.2.3 散射截面与对撞机信号

在上一小节, 我们导出了非最小耦合 ξ 的幺正性上限 (3.66), 如图 3.7 所示. 特别地, 当 ξ 足够大时, 可在对撞机所能及的尺度破坏幺正性限制. 这意味着有可能通过对撞机探测由非最小耦合带来的新物理. 本小节将研究这一可能性^[134].

由简单的定性分析可知, 若在 $\mathcal{O}(10\text{-}100\text{TeV})$ 的对撞机上通过弱规范玻色子观测到由 ξ 带来的新物理, 则 ξ 须大至 $\mathcal{O}(10^{14})$. 表面上看, 这似乎并不自然. 可是, 注意到 ξ 在有效作用量中总是与 $1/M_P$ 一同出现, 因而实则给出了新物理的截断尺度 $\Lambda_\xi \simeq M_P/\xi$, 从而很大的 ξ 无非意味着截断尺度 Λ_ξ 远低于 Planck 尺度. 虽然单从广义相对论和标准模型出发无法产生这样低的截断尺度, 但在新物理模型中(如额外维模型)则是可能的, 因此这在理论上仍是很有意义的选项. 特别是, 如若截断尺度 Λ_ξ 仅仅略高于电弱破缺尺度 v , 则有可能提示解决自然性问题的新途径.

在以下分析中, 我们取 $\Lambda_\xi \simeq 10\text{TeV}$ 与 50TeV 两种可能性. 前者是 LHC(14TeV) 所能探测的区域, 而后者则需要未来质子-质子对撞机($50\text{-}100\text{TeV}$). 与 3.1 节相同, 我们仍然考虑三种弱规范玻色子散射的过程, 即 (a) $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$; (b) $W_L^\pm Z_L^0 \rightarrow W_L^\pm Z_L^0$; (c) $W_L^\pm W_L^\pm \rightarrow W_L^\pm W_L^\pm$. 对于 $\Lambda_\xi \simeq 10\text{TeV}$ 的情形, 我们取散射能量 $\lesssim 4\text{TeV}$, 结果如图 3.8(a),(b),(c) 所示. 其中, 已取 Higgs 质量 $M_h = 125\text{GeV}$. 同时, 对散射角使用限制 $|\cos \theta| < 0.995$, 以排除 t 道和 u 道中小角散射的区域. 我们取 $\xi = 10^{15}$ (蓝色) 和 2×10^{15} (红色), 并将其结果与标准模型(黑色)对比, 从中可见散射振幅中正比于 E^2 项的效应. 与 3.1 节 SDR 的效应相同的是, 由于非最小耦合来自标量的引力相互作用, 因而对散射道不敏感, 故而在图 3.8 中 (a),(b),(c) 三过程中显示出相似的整体抬升.

图 3.8(a) 亦加入了非最小耦合 ξ 的重整化群跑动效应, 如其中红色和蓝色虚线所示. 其中, 使用了 ξ 的一圈图 β 函数^[139-142],

$$\beta_\xi = \frac{1 + 6\xi}{(4\pi)^2} \left(2\lambda + y_t^2 - \frac{3}{4}g^2 - \frac{1}{4}g'^2 \right), \quad (3.67)$$

其中 (g, g') 是电弱规范耦合, λ 是 Higgs 场的自耦合, 而 y_t 是顶夸克的 Yukawa 耦合. 图 3.8(a) 中, 我们在 $E = 4\text{TeV}$ 处输入 ξ 的初值 $\xi = 10^{15}$ 与 $\xi = 2 \times 10^{15}$, 然后解出 ξ 在 $E \leq 4\text{TeV}$ 处的值, 其跑动对散射截面的影响如图中虚线所示. 由此可见, ξ 的重整化群跑动效应在此过程中并不重要, 换言之, 树图计算已是足够好的近似.

对于 $\Lambda \simeq 50\text{TeV}$ 的情形, 取散射能量 $\lesssim 30\text{TeV}$, 结果如图 3.8(a'), (b'), (c') 所示. 其中, 取非最小耦合 $\xi = 1.5 \times 10^{14}$ 与 $\xi = 3 \times 10^{14}$, 与标准模型结果相对照. 在图 3.8(a') 中, 仍然计入了 ξ 的重整化群跑动效应, 由此可见树图结果在此能量范围内亦是很好的近似. 比较图 3.8(a), (b), (c) 与图 3.8(a'), (b'), (c') 可见, 当散射能量达到 $\sim 30\text{TeV}$ 时, 探测 ξ 的灵敏度相对于 $E \sim 4\text{TeV}$ 可提高一个量级. 因而, 建造未来质子-质子对撞机对探测此类效应是十分重要的.

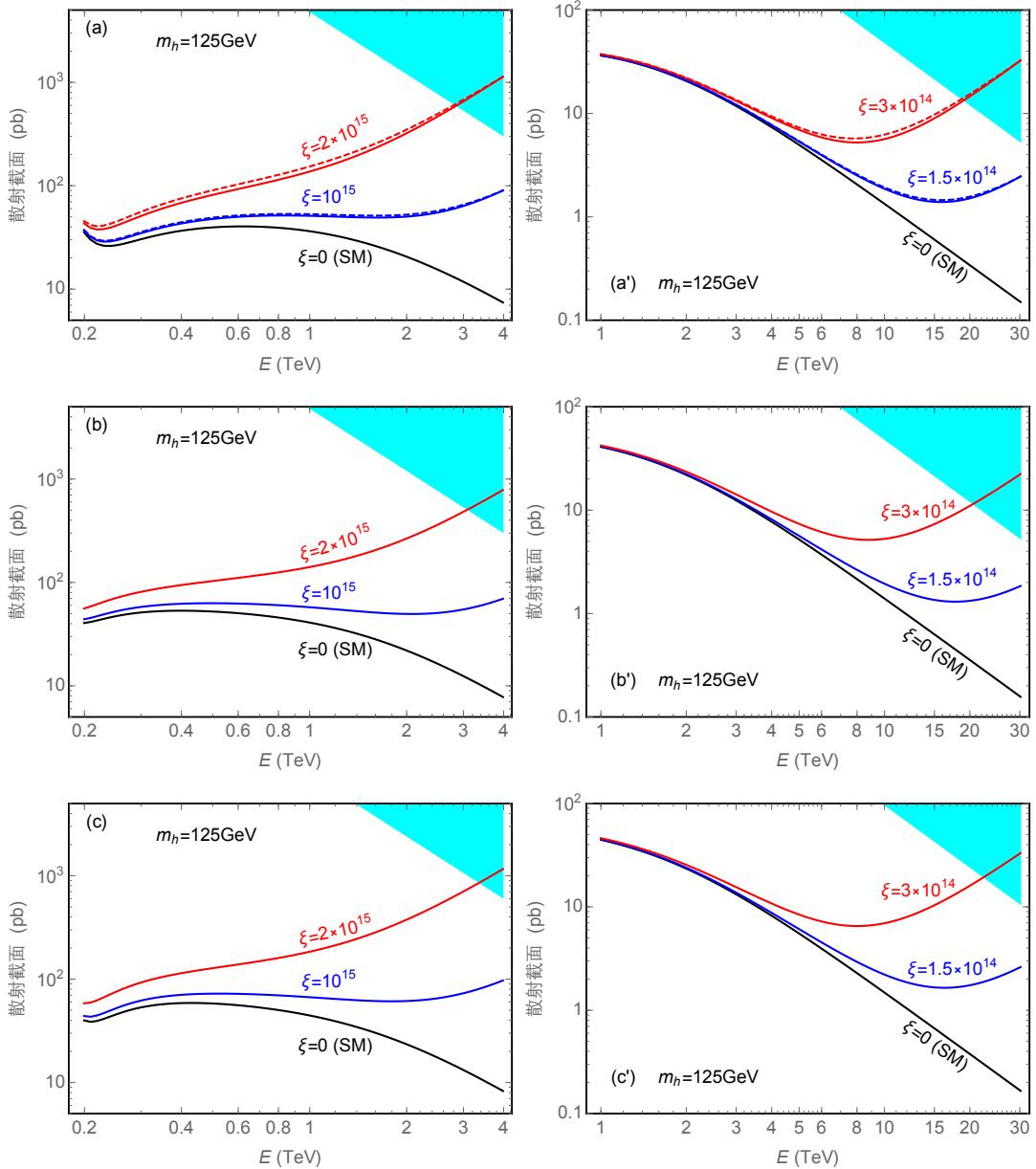


图 3.8 包含 Higgs 与引力非最小耦合 ξ 的标准模型中的弱规范玻色子散射截面作为质心系能量 E 的函数. 其中, (a) 与 (a') 为 $W_L^+ W_L^- \rightarrow Z_L^0 Z_L^0$, (b) 与 (b') 为 $W_L^\pm Z_L^0 \rightarrow W_L^\pm Z_L^0$, 而 (c) 与 (c') 为 $W_L^\pm W_L^\pm \rightarrow W_L^\pm W_L^\pm$. 每幅图中, 黑色曲线代表标准模型结果, 浅蓝色阴影代表破坏幺正性的区域. 在 (a), (b), (c) 中, 蓝色和红色曲线分别代表非最小耦合为 $\xi = 10^{15}$ 与 $\xi = 2 \times 10^{15}$ 的结果; 在 (a'), (b'), (c') 中, 蓝色和红色曲线分别代表非最小耦合为 $\xi = 1.5 \times 10^{14}$ 与 $\xi = 3 \times 10^{14}$ 的结果. 在 (a) 和 (a') 中, 蓝色和红色虚线代表加入 ξ 的重整化群跑动的结果.

第4章 标准模型 Higgs 暴胀

随着近几十年观测手段的不断进步与测量精度的日益提高，宇宙学如今已成为相当精确的定量科学。通过对早期宇宙的观测，亦成为探索基本自然规律的重要手段。本章和下一章将研究 Higgs 的引力相互作用在暴胀宇宙学中的重要后果。具体言之，我们将考虑由 Higgs 场的真空能所驱动的宇宙暴胀。在这过程中，Higgs 场与标量曲率的非最小耦合起到了关键作用。本章将研究标准模型中 Higgs 场所驱动的暴胀，而下一章将考虑其在若干新物理理论中的推广。

4.1 暴胀宇宙学简介

作为介绍 Higgs 暴胀理论的准备，本节回顾暴胀宇宙学的一般理论。

宇宙暴胀的理论提出于上世纪 80 年代初 [35, 143–146]，其最初的是解决大爆炸宇宙学的若干疑难，包括平坦性疑难、视界疑难、单极子疑难，等等。很快，物理学家意识到，宇宙暴胀不仅可以提供对以上疑难问题的解答，而且可以提供大爆炸的初条件 [147–150]。根据暴胀宇宙学的图像，现今宇宙中的大尺度结构来源于暴胀时期时空的量子涨落。在暴胀期间，宇宙的指数膨胀导致这些微小的量子涨落被迅速放大到当时的视界之外，从而退相干为经典的密度扰动，且在视界外不随时间演化。当暴胀结束后，这些密度扰动的模式依次进入视界，即参与到大爆炸之后的宇宙演化中。这些原初扰动可通过对宇宙微波背景（cosmological microwave background, CMB）以及物质分布的大尺度结构（large-scale structure, LSS）的观测而知，因而暴胀宇宙学成为一种可被测量和检验的宇宙学理论。特别是近二十年来，宇宙学已经发展到精确测量的阶段，因而可对暴胀宇宙学提供具体而定量的限制。与此同时，描述暴胀期间的物理过程通常需要借助高能粒子物理的模型，因而它对粒子物理也有特别的影响。这意味着，对暴胀时期物理的研究和观测，是我们认识高能现象的一个重要窗口。

本节简要介绍暴胀宇宙学的基本内容，为下文的研究提供必要的基础。我们将主要关注单场慢滚模型的暴胀动力学，包括背景度规和暴胀子的演化，以及此背景上量子涨落的演化。我们将略去对大爆炸宇宙学等背景内容的介绍。关于大爆炸宇宙学的详细介绍，可见 [151–154]；关于暴胀宇宙学的详细介绍，可见 [155–158] 以及 [159–162]。

4.1.1 经典动力学

如前所述，宇宙暴胀是指宇宙大爆炸开始前，宇宙所经历的一段加速膨胀的时期。因此，成功的暴胀动力学理论需要提供宇宙加速膨胀的机制，以及使宇宙停止加速膨胀、并过渡到大爆炸时期辐射主导宇宙的机制。在本文所关心的一大类暴胀模型中，这些机制都与一个（或多个）标量场有关。简言之，在这类模型中，宇宙加速膨胀的动力源于此标量场的真空能。在加速膨胀期间，该标量场经历一段时期的“慢速滚动”，以保证这段时间内的真空能大体保持不变；在加速膨胀末期，此标量场迅速落入其势能函数的局部极小值附近，继而在该势阱中快速振荡、并衰变为标准模型的各基本粒子。在此衰变过程中，标量场所携带的能量转化为标准模型粒子的动能，使宇宙进入热大爆炸的阶段。此即暴胀的单场（多场）慢滚模型，其中的标量场称为暴胀子（inflaton）^①。

现在我们简要介绍单场暴胀的经典动力学。作为起点，首先写出广义相对论的 Einstein-Hilbert 作用量、以及暴胀场 ϕ 的作用量如下，

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_p^2 \mathcal{R} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right], \quad (4.1)$$

假设均匀和各向同性的背景、以及平坦性^②，则时空度规必有平坦的 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 形式， $ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^i dx^i$ 。此坐标系亦称为随动 (comoving) 坐标系。于是真空能 $\Lambda = 0$ 的 Einstein 方程 (2.14) 的 00 分量化为如下关于尺度因子 $a = a(t)$ 的 Friedmann 方程，

$$3M_p^2 \mathcal{H}^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.2)$$

其中 $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ 表示对随动时间的导数， $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$ 即 Hubble 参数。另一方面，暴胀场 ϕ 的运动方程为，

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.3)$$

取 $\phi = \phi(t)$ 与平坦的 FRW 度规，上方程即化为，

$$\ddot{\phi} + 3\mathcal{H}\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4)$$

现在我们引入慢滚 (slow-roll) 假设，它包括两部分，一是，暴胀场的动能项 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ 远小于其势能项 $V(\phi)$ ，从而宇宙的能量密度 $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ 由标量势能主导；二

^①以下我们根据上下文会混用暴胀子和暴胀场两个术语。

^②均匀性、各向同性和平坦性皆为观测在不同程度上证实。例如，各向同性可从 CMB 上直到 10^{-4} 精度的各向同性的特征所知，而观测对平坦性的限制稍弱。但取时空曲率为零亦是很好的近似，特别是在暴胀时期，非零的曲率亦会被加速膨胀所迅速稀释。

是，暴胀场动能的变化率小于宇宙的膨胀率，即 $|\ddot{\phi}| \ll \mathcal{H}|\dot{\phi}|$ ，这保证标量势能主导能够持续相当长的时间。在此假设下，Friedmann 方程 (4.2) 中的动能项可略去，而有 $\mathcal{H}^2 \simeq V/3M_p^2$ ；同时，(4.4) 的第一项亦可略去，而有 $\dot{\phi} \simeq -V'_\phi/3\mathcal{H}$ 。由此两者即可解出 $\phi(t)$ 和 $a(t)$ 。

我们可以将慢滚条件表述为对标量势的限制。为此，将以上慢滚近似解 $\mathcal{H}^2 = V/3M_p^2$ 和 $\dot{\phi} \simeq -V'_\phi/3\mathcal{H}$ 代入第一个慢滚条件 $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ，即有 $\epsilon \ll 1$ ，其中第一个慢滚参数 ϵ 定义为，

$$\epsilon \equiv \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2. \quad (4.5)$$

同时，将慢滚解代入第二个慢滚条件 $|\ddot{\phi}| \ll \mathcal{H}|\dot{\phi}|$ ，即有， $| (M_p^2 V''/V) - \epsilon | \ll 1$ 。利用 $\epsilon \ll 1$ ，可得 $|\eta| \ll 1$ ，其中，第二个慢滚参数 η 定义为，

$$\eta \equiv \frac{M_p^2 V''}{V}. \quad (4.6)$$

以下提到慢滚条件时，总是指对于标量势的条件 $\epsilon \ll 1$ 以及 $|\eta| \ll 1$ 。这两个条件在暴胀期间总满足。若其中之一被破坏，暴胀即结束。定量言之，我们将取暴胀结束的条件为 $\epsilon = 1$ 或 $|\eta| = 1$ 。例如，若取标量势为 $V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda_p |\phi|^p$ ($p > 0$)，则当 ϕ 足够大 ($\gtrsim M_p$) 时，慢滚条件总满足，而当 ϕ 从很大的初值向 $\phi = 0$ 滚落时，在 $\phi = pM_p/\sqrt{2}$ 处 $\epsilon = 1$ ，而在 $\phi = \sqrt{p(p-1)}M_p$ 处 $|\eta| = 1$ 。因此当 $p \leq 2$ 时，暴胀结束于 $\phi_{\text{end}} = p/M_p/\sqrt{2}$ ；当 $p > 2$ 时，暴胀结束于 $\phi_{\text{end}} = \sqrt{p(p-1)}M_p$ 。

在暴胀时期，随动波长越大的模式，出视界越早。反之，在大爆炸时期，随动波长越大的模式，进视界越晚。将暴胀阶段的物理与大爆炸时期的可观测量建立联系时，起到关键作用的定理是，曲率扰动的模式出视界后即保持守恒（详见下文）。因此，我们今天所能见到的最大尺度的（对应于整个可见宇宙）的扰动、亦即目前刚好进入视界的模式，是我们所能见到在暴胀期间最早出视界的模式。在此之前发生的物理原则上在目前无法观测。因此，目前可见宇宙尺度的模式出视界之后的暴胀阶段被称为可观测暴胀（observable inflation）。这里，一个重要的物理量是可观测暴胀期间，宇宙膨胀的倍数。由于此阶段宇宙经历了指数速度的膨胀，因此合适的物理量是 $N_e = \log(a_{\text{begin}}/a_{\text{end}})$ ，称为 e 重数（number of e -foldings），其中 a_{begin} 与 a_{end} 分别是暴胀起始与结束时 FRW 度规中的尺度因子。设暴胀起始与结束时暴胀场的值分别为 ϕ_{begin} 和 ϕ_{end} ，则容易得到，

$$N_e = \int_{t_{\text{begin}}}^{t_{\text{end}}} dt \mathcal{H} = \int_{\phi_{\text{begin}}}^{\phi_{\text{end}}} d\phi \frac{\mathcal{H}}{\dot{\phi}} \simeq \frac{1}{M_p} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_{\text{begin}}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}}, \quad (4.7)$$

其中最后一个等式使用了慢滚解 $\dot{\phi} \simeq V'/3\mathcal{H}$ 。

4.1.2 量子涨落与暴胀观测量^①

现在我们考察暴胀时期量子涨落的演化。为此，我们在前节的背景场上加入一阶扰动。在 FRW 形式下，背景度规具有空间部分的 $SO(3)$ 旋转对称性。可利用此对称性为度规的扰动分类，计有 4 个标量模式、4 个矢量模式，和 2 个张量模式。同时，标量暴胀场的扰动只有 1 个标量模式。另一方面，时空的广义坐标变换将这些模式相互联系。微小广义坐标变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ 的参数 ϵ^μ 亦可分解为 2 个标量模式和 2 个矢量模式。因此，可选取适当的规范，消去度规和暴胀场涨落中的 2 个标量和 2 个矢量模式。

详言之，对于暴胀场 ϕ ，可在其背景上加入一阶扰动 $\phi(t, x) = \phi(t) + \delta\phi(t, x)$ 。对于度规 $g_{\mu\nu}$ ，使用第 2 章介绍的 ADM 方法，将 FRW 度规上的扰动参数化为，

$$ds^2 = N^2(t, x)dt^2 - \hat{g}_{ij}(t, x)[N^i(t, x)dt + dx^i][N^j(t, x)dt + dx^j], \quad (4.8)$$

其中，

$$\hat{g}_{ij}(t, x) = a^2(t)e^{2\xi(t, x)}[\delta_{ij} + \gamma_{ij}(t, x)], \quad (4.9)$$

$N = 1 + N_1$, $N_i = \partial_i \psi + N_i^T$, 这里 N_1 、 ψ 、 N_i^T ，和 γ_{ij} 都是一阶微扰，且 N_i^T 只有横分量，即 $\nabla^i N_i^T = 0$ 。在只有标量物质场的宇宙中， N_i^T 在微扰的第一阶等于 0。另外， ξ 标记度规之迹的一阶扰动，因为它正比于曲率的一阶扰动，因此称为曲率扰动 (curvature perturbation)。现在，我们选取 ξ -规范，即取 γ_{ij} 中的标分量、矢量分量，以及 $\delta\phi$ 为零。从而只需考虑 N_1 、 ψ 、 ξ 三个标量扰动和 γ_{ij} 中的张量扰动。现在，将以上度规带入作用量的 ADM 分解形式，

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{\hat{g}} N \left[\widehat{\mathcal{R}} - 2V(\phi) + N^{-2}(E_{ij} E^{ij} - E^2) + N^{-2}(\dot{\phi} - N^i \partial_i \phi)^2 - \hat{g}^{ij} (\partial_i \phi)(\partial_j \phi) \right]. \quad (4.10)$$

我们希望找到扰动场的线性作用量，因此须在作用量中保留扰动场的 2 次。首先，只考虑标量扰动，即取 $\gamma_{ij} = 0$ 。利用如下展开式，

$$\hat{g}^{ij} = a^{-2}e^{-2\xi}\delta_{ij}, \quad (4.11a)$$

$$\widehat{\Gamma}_{ij}^k = (\delta_{kj} \partial_i \xi + \delta_{ki} \partial_j \xi - \delta_{ij} \partial_k \xi), \quad (4.11b)$$

$$\widehat{R} = -a^{-2}e^{-2\xi}[4\partial^2 \xi + 2(\partial_i \xi)^2], \quad (4.11c)$$

$$E_{ij} = a^2 e^{2\xi} (\mathcal{H} + \dot{\xi}) \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \psi + (\partial_i \xi)(\partial_j \psi) + (\partial_j \xi)(\partial_i \psi) - \delta_{ij} \partial \xi \cdot \partial \psi, \quad (4.11d)$$

$$E_{ij} E^{ij} - E^2 = -6\mathcal{H}^2 - 12\mathcal{H}\dot{\xi} - 6\dot{\xi}^2 + 4a^{-2}e^{-2\xi}(\mathcal{H} + \dot{\xi} - \mathcal{H}\xi)\partial^2 \psi. \quad (4.11e)$$

^① 本小节取 $M_P = 1$ 。

可得,

$$S_s^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[-(3-\epsilon)\mathcal{H}^2 N_1^2 + (-2a\mathcal{H}\partial^2\psi - 2a\partial^2\zeta + 6a^3\mathcal{H}\dot{\zeta})N_1 + 2a(\partial^2\psi)\dot{\zeta} - 3a^3\dot{\zeta}^2 - a(18a^2\mathcal{H}\dot{\zeta} + \partial^2\zeta)\zeta - 9a^3\mathcal{H}^2(3-\epsilon)\zeta^2 \right], \quad (4.12)$$

其中 $\epsilon = \dot{\phi}^2/2\mathcal{H}^2$, 在慢滚近似下这与定义 (4.5) 一致. 易见 N_1 的运动方程 $\delta S_s^{(2)}/\delta N_1 = 0$ 和 $\partial^2\psi$ 的运动方程 $\delta S_s^{(2)}/\delta\psi = 0$ 是代数方程, 从中可解出,

$$N_1 = \mathcal{H}^{-1}\dot{\zeta}, \quad \partial^2\psi = -\mathcal{H}^{-1}\partial^2\zeta + a^2\epsilon\dot{\zeta}. \quad (4.13)$$

将此解代回 $S_s^{(2)}$, 可得关于 ζ 及其导数的二次表达式, 其中有形如 $\dot{\zeta}\dot{\zeta}$ 和 $\dot{\zeta}\partial^2\zeta$ 的表达式. 作分部积分, 可将这些项进一步化为形如 $\dot{\zeta}^2$ 和 $(\partial\zeta)^2$ 的项. 在作这些分部积分时, 我们也用到慢滚参数的等价表达式^① $\epsilon = -\dot{\mathcal{H}}/\mathcal{H}^2$. 最终, 我们得到如下表达式,

$$S_s^{(2)} = \int dt d^3x \epsilon \left[a^3\dot{\zeta}^2 - a(\partial\zeta)^2 \right]. \quad (4.14)$$

此作用量正比于慢滚参数 ϵ 的物理意义很清楚: 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限下, 时空在局部等同于 de Sitter 时空, 因此 ζ 成为非物理的规范模式. 同时, 易见 $S_s^{(2)}$ 是自由场 ζ 的作用量, 因此可对 ζ 作正则量子化. 首先, 将 ζ 分解为模式,

$$\zeta(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\zeta_k(t) a_k e^{ik \cdot x} + \zeta_k^*(t) a_k^\dagger e^{-ik \cdot x} \right], \quad (4.15)$$

其中 $\zeta_k(t)$ 是经典场方程 $\delta S_s^{(2)}/\delta\zeta = 0$ 的解. 用共形时间 $\tau \sim \int dt a^{-1}(t)$ 可表示如下,

$$\zeta_k(\tau) = \frac{\mathcal{H}}{2\sqrt{\epsilon k^3}} (1 + ik\tau) e^{-ik\tau}. \quad (4.16)$$

注意到 $\tau \in (\infty, 0)$, 因而 ζ_k 出视界后对应于 $\tau \rightarrow 0^-$, 且随动时间 $\delta t \simeq e^{\mathcal{H}t}\delta\tau$, 因此可见 ζ_k 出视界后趋于常数, 即前文提及的定理: 曲率扰动在视界外守恒.

现在, 为计算扰动 ζ_k 的两点关联函数, 需要选取适当的真空. 为此, 注意到 ζ_k 在早期的物理尺度应远小于视界, 因而根据等效原理, 它所感受到的背景时空应近似为平坦的 Minkowski 时空. 从而通常的假设是, 可选取此 Minkowski 中的真空 $|0\rangle$, 亦即被所有 a_k 湮灭的真空, $a_k|0\rangle = 0 (\forall k)$, 这称为 Bunch-Davis 真空. 于是, 容易得到 ζ_k 的两点关联函数为,

$$\langle \zeta_k \zeta_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k + k') \frac{2\pi^2}{k^3} P_\zeta(k), \quad (4.17)$$

^①推导如下: 由 Friedmann 方程 $3\mathcal{H}^2 \simeq V \Rightarrow 6\mathcal{H}\dot{\mathcal{H}} \simeq V'\dot{\phi}$. 代入慢滚解 $\dot{\phi} \simeq -V'^2/3\mathcal{H}$ 即得 $\epsilon = -\dot{\mathcal{H}}/\mathcal{H}^2$.

其中,

$$P_\zeta(k) = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi^2\epsilon}, \quad (4.18)$$

称为标量功率谱. 它在重新进入视界后转化为 CMB 上的扰动, 因而直接对应于可观测量.

类似地, 可讨论张量扰动. 为此, 只保留一阶扰动 (4.8) 中的 γ_{ij} 分量, 代入 (4.10), 可得张量扰动的线性化作用量,

$$S_t^{(2)} = \frac{1}{8} \int dt d^3x \left[a^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}^{ij} - a(\partial_k \gamma_{ij})(\partial^k \gamma^{ij}) \right]. \quad (4.19)$$

依照与标量模式类似的推导, 可得张量功率谱为,

$$P_\gamma(k) = \frac{2\mathcal{H}^2}{\pi^2}. \quad (4.20)$$

(4.18) 中的 P_ζ 和 (4.20) 中的 P_γ 都不依赖于 k , 这被称为扰动谱的尺度不变性 (scale invariance). 其原因在于解 (4.16) 使用了 de Sitter 近似, 即 Hubble 参数 \mathcal{H} 是不依赖时间的常数. 事实上, 由于慢滚参数不为零, \mathcal{H} 并非严格的常数, 而是随时间有缓慢的变化. 因此, 对应不同 k 的模式出视界时, 相应的 \mathcal{H} 并不相等. 因此, P_ζ 和 P_γ 通过 \mathcal{H} 对 k 有微弱的依赖, 且此依赖必正比于慢滚参数. 为刻画功率谱对 k 的这种依赖, 可定义如下谱指数 (spectral index),

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \log P_\zeta(k)}{d \log k}, \quad n_t - 1 \equiv \frac{d \log P_\gamma(k)}{d \log k}, \quad (4.21)$$

其中 n_s 为标量谱指数, 而 n_t 为张量谱指数. 与此相仿, 可进一步定义谱指数的跑动. 例如对于标量谱,

$$\alpha_s \equiv \frac{d \log n_s}{d \log k}. \quad (4.22)$$

为找到谱指数在以上慢滚近似中的表达式, 须注意到 (4.18) 中, \mathcal{H} 应在随动波数 k 的模式出视界时取值. 在出视界时, $a/k = 1/H$, 由此知 $d \log k \simeq d \log a = H dt$, 于是,

$$\begin{aligned} \frac{d \log P_\zeta}{d \log k} &\simeq \frac{d}{\mathcal{H} dt} (2 \log \mathcal{H} - \log \epsilon) = 2\eta - 6\epsilon, \\ \frac{d \log P_\gamma}{d \log k} &\simeq \frac{2d \log \mathcal{H}}{\mathcal{H} dt} = -2\epsilon. \end{aligned} \quad (4.23)$$

因此有,

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, \quad n_t = -2\epsilon. \quad (4.24)$$

另外, 还可以求出张量谱与标量谱之比 r , 称为张标比 (tensor-to-scalar ratio),

$$r = \frac{P_\gamma}{P_\zeta} = 16\epsilon. \quad (4.25)$$

谱指数 n_s 、 n_t ，以及张标比 r ，都是很重要的可观测量。以上计算将这些可观测量直接表为慢滚参数。因此，在单场慢滚暴胀中，只要求得可观测暴胀之初的慢滚参数，就能得到对这些观测量的预言。注意到，在此类暴胀模型中， ϵ 和 η 都远小于 1 但都不为 0，这意味着功率谱的近似但不严格的尺度不变性。这是暴胀理论的重要预言。

非高斯性 以上讨论了扰动演化的线性近似。讨论非线性需要将作用量展开至扰动量的三次项，同时需要考虑到相互作用真空的演化。由此可计算扰动的三点关联，它对应于 CMB 上的非高斯性。非高斯性是非常重要的暴胀观测量。有关内容可参考 [163–165]。

幂律混沌暴胀 我们以 $V = \lambda_p |\phi|^p$ ($p > 0$) 讨论暴胀观测量。注意，这里的 λ_p 一般而言有非零的能量量纲 $[\lambda_p] = 4 - p$ 。在这种情形下， $\phi_{\text{begin}} \gg \phi_{\text{end}}$ ，因而暴胀 e 重数可近似为 $N_e \simeq \phi_{\text{begin}}^2 / (2pM_p^2)$ ，而前两个慢滚参数 ϵ 与 η 亦可以 e 重数 N_e 表出，即 $\epsilon \simeq p/(4N_e)$ ， $\eta \simeq (p-1)/(2N_e)$ 。于是，可得谱指数 $n_s \simeq 1 - (2+p)/(2N_e)$ 和张标比 $r \simeq 4p/N_e$ 。因而，此类模型的预言还依赖于 e 重数。 e 重数的大小一般与重加热过程有关，我们将在下面简要介绍之。另外，由观测而知的标量谱幅度 $\propto V/\epsilon$ ，可求得 λ_p 。例如， $p = 2$ 时有 $\lambda_2 \sim \mathcal{O}(10^{13})\text{GeV}$ ，而 $p = 4$ 时则有 $\lambda_4 \sim \mathcal{O}(10^{-13})$ 。

重加热 在暴胀期间，暴胀子缓慢地沿其标量势滚下，直到慢滚条件被破坏。此后，暴胀子迅速落向势能的极小值，在极小值附近振荡，继而衰变，最终衰变到标准模型诸粒子。在此过程中，暴胀子的真空能部分地转化为标准模型粒子的动能，最终达到准热平衡，从而使宇宙进入大爆炸阶段。此过程称为重加热 (reheating) [166–168]。

与暴胀期间的动力学相对，重加热的过程可以十分复杂，且高度依赖于模型。然而现今可观测的原初扰动在重加热期间都位于视界外，所以不受重加热过程的影响。这一方面意味着暴胀可以做出相对确定的预言，但同时也意味着重加热过程的物理学很难通过宇宙学观测而知。尽管如此，各种观测和实验对重加热方式仍有间接的限制。例如，重加热温度可与暴胀的 e 重数相关联，而后者则会影响（尽管相当微弱）暴胀对诸种观测量的预言。因而，精确地测量标量谱指数 n_s 或张标比 r ，可对重加热过程有非平凡的限制 [169]。

关于重加热期间的动力学，如果暴胀子与物质场的耦合很弱（如引力耦合），则衰变过程很慢，此时，可用微扰论近似处理之。与之相应，由于重加热耗时较

长，故而重加热温度较低。反之，如若暴胀子与物质场耦合并不弱（如 Higgs 粒子与标准模型粒子的耦合），则暴胀子衰变的过程可高度非微扰，从而此时共振效应将起主导作用。相应的重加热过程具有很高的效率，从而重加热温度可相当高。

4.2 Higgs 暴胀的经典理论

本节回顾 Higgs 暴胀的经典理论^[29, 170]。Higgs 玻色子是目前实验发现的唯一基本标量粒子。因此，值得仔细探究 Higgs 粒子作为暴胀子的可能性。

在前节中已介绍，在标准的单场慢滚暴胀中，暴胀子的标量势在暴胀期间必须相当平坦。因此，如若将 Higgs 粒子认作暴胀子，就需要在 Higgs 势中找到相应的平坦区间。在标准模型的 Higgs 势(2.5)中，这有两种潜在的可能性。一是由负的二次项 $-\mu^2 H^\dagger H$ 在 $H = 0$ 处形成的平台，二是当 $H \gg v$ 时由四次项 $\lambda(H^\dagger H)^2$ 所主导的区域。但是容易看出，这两种可能性在数量级上与观测结果相差甚远。首先，如果暴胀起始于 $H = 0$ 处的平台，则一般要求此平台的高度在 10^{13}GeV 左右，远高于标准模型值 $\sqrt{\lambda}v \sim \mathcal{O}(10^2 \text{GeV})$ ；另一方面，若利用四次项，则要求自耦合常数 $\lambda \sim 10^{-13}$ ，远小于标准模型值^① $\lambda \sim \mathcal{O}(0.1)$ 。因此，若希望通过标准模型 Higgs 场驱动宇宙早期的暴胀，则必须对其动力学作修改。

一种简单的修改是引入 Higgs 场与 Ricci 标量的非最小耦合项^[29, 170] $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 。在 3.2 节我们讨论过，将含有此项的 Jordan 系作用量(3.31)通过 Weyl 变换重新用 Einstein 系的变量表出后，Higgs 场的标量势成为，

$$V(H) = \frac{\lambda(H^\dagger H)^2}{\Omega^4} = \frac{\lambda(H^\dagger H)^2}{(1 + 2\xi H^\dagger H/M_p^2)^2}, \quad (4.26)$$

这里我们考虑 $H \gg v$ 的情形，因而略去二次项。由此式可见，若 $\xi \gg 1$ ，则当 $H > M_p/\sqrt{\xi}$ 时，Weyl 因子 $\Omega^2 \simeq \xi H^\dagger H/M_p^2$ ，从而标量势 $V(H)$ 在 H 很大时 ($H \gg M_p/\sqrt{\xi}$) 趋于常值 $(\lambda/\xi^2)M_p^4$ 。这意味着，引入 $\xi \gg 1$ 的非最小耦合将在高能区将标准模型的 Higgs 势变得非常平坦，因而可以用于驱动暴胀。下文将这种实现 Higgs 暴胀的方案称为标准 Higgs 暴胀，以与其他方案相区分。

现在我们仔细讨论 Higgs 暴胀的经典理论。如果我们将 Higgs 场 H 中 CP 为正的中性分量 ϕ 认作暴胀子，则由(3.34)式和(4.26)式，可写出其在 Einstein 系中的拉格朗日量如下，

$$\mathcal{L}[\phi] = \sqrt{-g} \left[\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 \phi^2/M_p^2}{2\Omega^4} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda \phi^4}{4\Omega^4} \right], \quad (4.27)$$

^①一个可能的漏洞是，此处所估计的 Higgs 自耦合常数为其经典值。在计及量子修正后， $\lambda \sim \mathcal{O}(0.1)$ 应被视作电弱尺度处的输入值，经过重整化群流演化到暴胀尺度后， λ 有可能变得极小、从而有可能给出适合作为暴胀的标量势。我们将在 4.4 节讨论这种可能性，并在 5.1 节讨论其在新物理中的实现。

其中 Weyl 因子 $\Omega^2 = 1 + \xi\phi^2/M_p^2$. 在第3章关于散射振幅的计算中, 已取 Higgs 的背景值为电弱破缺的真空, $\phi = v \simeq 246\text{GeV}$. 但由于暴胀期间 ϕ 的背景值并不固定且可以很大, 因而 ϕ 的动能项前的系数不再是(3.43)中的常值因子, 而是依赖于背景场 ϕ 本身, 从而 ϕ 也不再是正则归一的场变量. 设与之相应的正则归一的场为 χ , 则可知 χ 与 ϕ 的关系为,

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \frac{\sqrt{\Omega^2 + 6\xi^2\phi^2/M_p^2}}{\Omega^2}. \quad (4.28)$$

于是可以立即计算慢滚参数如下,

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2V^2} \left(\frac{d\phi}{d\chi} \frac{dV}{d\phi} \right)^2, \quad \eta = \frac{M_p^2}{V} \frac{d\phi}{d\chi} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{d\chi} \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (4.29)$$

同时, 慢滚的 e 重数 N_e 为,

$$N_e = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_{\text{begin}}} d\phi \left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 \frac{V}{dV/d\phi}. \quad (4.30)$$

以上各量皆可用 ϕ 表出, 因此无需计算 $\chi = \chi(\phi)$ 的显式表达. 但是求出 $\chi = \chi(\phi)$ 在暴胀期间的近似解更有助于看清物理的图像. 为此, 注意到在暴胀期间 $\phi \gg M/\xi$, 因而可取近似 $d\chi/d\phi \simeq \sqrt{6}\xi\phi/(M_p\Omega^2)$, 从而有 $\chi \simeq \sqrt{3/2}M_p \log \Omega^2(\phi)$. 于是, 在暴胀期间, 标量势 $V(\chi)$ 具有如下指数平坦的形状,

$$V(\chi) \simeq \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2} \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\chi/M_p} \right)^2, \quad (4.31)$$

于是, 可得慢滚参数如下,

$$\begin{aligned} \epsilon &\simeq \frac{4}{3} \left(e^{\sqrt{2/3}\chi/M_p} - 1 \right)^{-2}, \\ \eta &\simeq -\frac{4}{3} \left(e^{\sqrt{2/3}\chi/M_p} - 2 \right) \left(e^{\sqrt{2/3}\chi/M_p} - 1 \right)^{-2}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

而慢滚的 e 重数 N_e 亦可表出如下,

$$N_e \simeq \frac{3}{4} \left[e^{\sqrt{2/3}\chi_{\text{begin}}/M_p} - e^{\sqrt{2/3}\chi_{\text{end}}/M_p} - \frac{\sqrt{2/3}(\chi_{\text{begin}} - \chi_{\text{end}})}{M_p} \right]. \quad (4.33)$$

因此, 慢滚结束的条件 $\epsilon = 1$ 给出,

$$\chi_{\text{end}} \simeq \frac{3}{2} \log(1 + 2/\sqrt{3}) M_p \simeq 0.940 M_p. \quad (4.34)$$

一如既往, 可观测暴胀开始时的场值 χ_{begin} 依赖于 N_e . 如若假设 $N_e = 50 \sim 60$, 则 $N_e = 50$ 给出 $\chi_{\text{begin}} \simeq 5.244 M_p$, 而 $N_e = 60$ 给出 $\chi_{\text{begin}} \simeq 5.453 M_p$. 由此, 可立即

求得暴胀开始时的慢滚参数、以及标准 Higgs 暴胀的标量谱指数 n_s 和张标比 r 为,

$$\epsilon \simeq 0.00026, \quad \eta \simeq -0.0184, \quad n_s \simeq 0.962, \quad r \simeq 0.004; \quad (N_e = 50) \quad (4.35a)$$

$$\epsilon \simeq 0.00019, \quad \eta \simeq -0.0155, \quad n_s \simeq 0.968, \quad r \simeq 0.003. \quad (N_e = 60) \quad (4.35b)$$

值得注意的是, 这些预言只要求 $\xi \gg 1$, 除此以外并不依赖于模型中的各参数. 对模型参数的限制来自标量谱的振幅 $P_\zeta = \mathcal{H}^2 / 8\pi^2 \epsilon \simeq V / 24\pi^2 \epsilon$. 根据 Planck 的结果 [171]^①, $P_\zeta(k_* = 0.002) \simeq 2.142 \times 10^{-9} M_p^4$, 由此知 $(V/\epsilon)^{1/4} \simeq 0.0267 M_p$. 因而, 若取 Higgs 自耦合常数的经典值 $\lambda = m_h^2 / (2v^2) \simeq 0.13$, 则有 $\xi \simeq 1.56 \times 10^4$ (对于 $N_e = 50$) 或 $\xi \simeq 1.83 \times 10^4$ (对于 $N_e = 60$).

由此可见, 在 Higgs 暴胀的经典理论中, 对理论参数几乎唯一的预言来自 λ/ξ^2 , 除此之外, 对标准模型各参数无限制. 特别地, 成功的 Higgs 暴胀并不依赖 Higgs 玻色子的质量. 此状况在考虑量子修正后将被极大地改变. 特别地, 我们将在 4.4 节介绍, 在目前的实验数据下, 成功的 Higgs 暴胀将敏感地依赖于 Higgs 玻色子以及顶夸克的质量. 特别是, 已目前 Higgs 质量与顶夸克质量的测量结果, 标准 Higgs 暴胀已在 $(2 \sim 4)\sigma$ 的置信度下被排除 [173]. 因而, 成功的 Higgs 暴胀将不可避免地需要新物理.

另一方面, 即使只考虑经典理论, Higgs 暴胀也面临另一个理论上的问题, 即幺正性问题 [174–180]. 上文提到, 成功的 Higgs 暴胀要求非最小耦合 $\xi \sim \mathcal{O}(10^4)$; 而根据 3.2 节的结果, 对于给定的非最小耦合 ξ , 理论的幺正性要求散射能量 $E \lesssim M_p/\xi \sim \mathcal{O}(10^{14}) \text{ GeV}$. 然而在 Higgs 暴胀期间, 能量密度通常为 $V^{1/4} \sim \lambda^{1/4} M_p / \sqrt{\xi} \sim \mathcal{O}(10^{16}) \text{ GeV}$, 因而远大于理论的树图幺正性限制. 因而, 用经典理论处理 Higgs 暴胀的正确性就成为可疑的问题. 我们将在 4.3 节定量研究之. 简言之, 结论是用经典理论 (即停留在树图阶) 处理 Higgs 暴胀并没有幺正性问题, 因为此时未归一化的 Higgs 场 ϕ 的真空值可以大至 $\mathcal{O}(M_p / \sqrt{\xi})$, 而归一化的场 $\chi \sim \mathcal{O}(M_p)$, 因而远大于电弱真空的背景值 $v \simeq 246 \text{ GeV}$. 所以, 3.2 节的计算并不适用于暴胀尺度. 此时, Higgs 场很大的背景值将减弱幺正性限制, 使得理论在 Higgs 暴胀期间保持良好的微扰幺正性.

Higgs 暴胀后的重加热 上节提到, Higgs 场与标准模型各粒子间有相当强的耦合, 因而在重加热期间, Higgs 粒子以非微扰的共振过程衰变到标准模型粒子. 最初的衰变过程主要是弱规范玻色子, W^\pm 和 Z^0 随后微扰地衰变到费米子, 从而完成

^① 在 [171] 中, P_ζ 的幅度记作 A_s , 参见 [172] 式(5).

Higgs 场真空能的转化. 由于该过程效率很高, 因而重加热结束时的温度可相当高, $T_{\text{reh.}} \sim \mathcal{O}(10^{14})\text{GeV}$, 相应的暴胀 e 重数 N_e 约为 59. 相关讨论可见 [181, 182].

新 Higgs 暴胀及其他 除了本节详述的标准 Higgs 暴胀外, 还有一类新 Higgs 暴胀 (new Higgs inflation) 模型 [183–185], 利用量纲为 6 的有效算子 $G^{\mu\nu}(\mathbf{D}_\mu H)^\dagger(\mathbf{D}_\nu H)$, 其中 $G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R}$ 是 Einstein 张量. 如同 $\mathcal{R}H^\dagger H$, 此算子亦不引入新的自由度. 但与 $\mathcal{R}H^\dagger H$ 不同的是, 它并不修改 Higgs 场的势能项, 而是修改其动能项, 以满足慢滚条件, 从而给出符合观测结果的预言. 亦有文献 [186] 将新 Higgs 暴胀与标准 Higgs 暴胀、以及 Higgs 暴胀的其他变种统一分析. 此外, 还有利用 Higgs 势 $V(\phi)$ 在 $\phi \simeq 10^{16}\text{GeV}$ 左右的假真空中产生暴胀的尝试 [187, 188]. 这类模型需要借助新的标量自由度, 但仍能对 Higgs 质量作出预言.

Starobinsky 模型 Starobinsky 模型的提出远早于 Higgs 暴胀 [35]. 与 Higgs 暴胀相似, 该模型利用量纲为 4 的有效算子构造平坦的暴胀势. 在这种理论中, 关键的算子是 \mathcal{R}^2 而非 $\mathcal{R}H^\dagger H$. 此理论中有一标量自由度, 当通过 Weyl 变换转移到 Einstein 系后, 该标量场亦获得指数平坦的势能. 因而其对暴胀观测量的预言与 Higgs 暴胀几乎相同. 但由于这两种暴胀模型的重加热过程很不同, 因而所需的暴胀 e 重数 N_e 也不同, 这会微弱地影响到标量谱指数 n_s 的值. 因而精确地测量 n_s 是区分这两种模型的方式之一.

4.3 Higgs 暴胀的幺正性

本节将仔细研究 Higgs 暴胀的幺正性问题 [134]. 已如前述, 根据 3.2 节的结果, 标准 Higgs 暴胀理论可能有破坏微扰幺正性的问题. 但 3.2 节的计算皆假设了电弱真空, 而在 Higgs 暴胀期间, Higgs 场的真空值远高于电弱真空, 因此, 为确定 Higgs 暴胀的幺正性, 须将 3.2 节的计算推广到一般背景场的情形. 早前文献对此亦有定性讨论 [170, 189], 但本节计算将是对此结果的定量确证.

我们仍然由 Jordan 系的作用量 (3.31) 出发. 为便于与第三章结果对照, 本节将 Higgs 场 H 参数化为 $H = (\pi^+, \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\phi} + \phi + i\pi^0))^T$, 其中 $\bar{\phi}$ 是 Higgs 场的背景值. 为方便记, 此处设之为常数. 由于背景值 $\bar{\phi}$ 并不固定, 因此可定义依赖于背景值的有效 Planck 质量 $\bar{M}_\text{P} \equiv M^2 + \xi\bar{\phi}^2$.

在 3.2 节我们已看到, 将作用量换到 Einstein 系相较于 Jordan 系可简化计算, 因此本节将直接在 Einstein 系中分析. 从 Jordan 系到 Einstein 的 Weyl 变换因子仍为 $\Omega^2 = (M^2 + 2\xi H^\dagger H)/M_\text{P}^2 \simeq 1 + 2\xi H^\dagger H/M_\text{P}^2$. 在 3.2 节中, $\bar{\phi} = v$, 因而 Ω^2 的背

景值可近似为 1. 与此相对, 本节 $\bar{\phi}$ 可大至 $\mathcal{O}(M_p/\xi)$, 使得 Ω^2 的背景值显著大于 1. 因此, 可定义依赖于 $\bar{\phi}$ 的 Weyl 因子背景值 $\bar{\Omega}^2 \equiv (M^2 + \xi \bar{\phi}^2)/M_p^2 = \bar{M}_p^2/M_p^2$. 此时的 Einstein 系作用量仍然为 (3.34), 但将其在背景场 $\bar{\phi}$ 上作展开时, 其结果将异于 3.2 节. 首先, Higgs 场各分量的动能项为,

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}} = \frac{1}{2\bar{\Omega}^2} \left(1 + \frac{6\xi^2\bar{\phi}^2}{\bar{M}_p^2} \right) (\partial_\mu \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2\bar{\Omega}^2} |\partial_\mu \tilde{\pi}|^2, \quad (4.36)$$

其中, 同 3.2 节记号, $|\partial_\mu \tilde{\pi}|^2 = 2\partial_\mu \tilde{\pi}^+ \partial^\mu \tilde{\pi}^- + (\partial_\mu \tilde{\pi}^0)^2$. 可见, $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\pi}$ 的动能项皆未正则归一化, 相应的正则归一化场 (ϕ, π) 可通过变换 $\tilde{\phi} = \bar{\Omega}\bar{\xi}\phi$ 以及 $\tilde{\pi} = \bar{\Omega}\pi$ 而得, 其中, $\bar{\xi} \equiv (1 + 6\xi^2\bar{\phi}^2/\bar{M}_p^2)^{-1/2}$.

下面, 我们将用正则归一的场变量 (ϕ, π) 表出 Einstein 系中与弱规范玻色子散射相关的相互作用项. 在 3.2 节, 我们保留了所有形如 $(\xi/M_p)^{2n}$ 的项与正比于 ξ/M_p^2 的项, 其中, 只有前者在电弱真空背景上的散射过程中起重要作用. 与此相对, 在分析暴胀期间的散射过程时, 尚需保留形如 $(\xi/M_p^2)^n$ 的高阶项. 由此可得 Einstein 系中标量场的 3 顶点与 4 顶点相互作用项如下,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{\text{int}}^{ss} = & -\frac{\xi\bar{\Omega}^2}{2\bar{M}_p^2} \left[|\partial_\mu \pi|^2 + \bar{\xi}^2 (\partial_\mu \phi)^2 \right] \left[|\pi|^2 + \left(1 - \frac{4\xi\bar{\phi}^2}{\bar{M}_p^2} \right) \bar{\xi}^2 \phi^2 + \frac{2\bar{\xi}\bar{\phi}}{\bar{\Omega}} \phi \right] \\ & + \frac{3\xi^2\bar{\Omega}^2}{4\bar{M}_p^2} \left[1 - \frac{2\xi\bar{\Omega}^2}{\bar{M}_p^2} \left(|\pi^2| + \bar{\xi}^2 \phi^2 + \frac{2\bar{\xi}\bar{\phi}}{\bar{\Omega}} \phi \right) + \frac{12\xi^2\bar{\Omega}^2\bar{\phi}^2}{\bar{M}_p^4} \bar{\xi}^2 \phi^2 \right] \\ & \times \left[\partial_\mu \left(|\pi^2| + \bar{\xi}^2 \phi^2 + \frac{2\bar{\xi}\bar{\phi}}{\bar{\Omega}} \phi \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

由此, 可依照 3.2 节的方式, 计算所有中性初末态的标量场散射振幅, 结果列于表 4.1, 其中 $q \equiv \xi\bar{\phi}^2/\bar{M}_p^2$.

与 3.2 节中表 3.2 的结果相仿, 此处的散射振幅也按是否含有 ϕ 场而分为两类, 在每一类中, 不同的振幅间只相差运动学因子. 同时, 作为表 3.2 的推广, 表 4.1 在 $\bar{\phi} = v$ 的极限下即可还原为表 3.2.

同时, 我们也列出一般背景 $\bar{\phi}$ 下, Higgs 场与规范场的相互作用项如下,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{\text{int}}^{sg} = & (2m_W^2 W^+ W^- + m_Z^2 Z_\mu^2) \\ & \times \left[\left(1 - \frac{\xi\bar{\phi}^2}{\bar{M}_p^2} \right) \frac{\bar{\xi}\bar{\Omega}}{\bar{\phi}} \phi + \left(1 - \frac{5\xi\bar{\phi}^2}{\bar{M}_p^2} + \frac{4\xi^2\bar{\phi}^4}{\bar{M}_p^4} \right) \frac{\bar{\xi}^2\bar{\Omega}^2}{2\bar{\phi}^2} \phi^2 \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

其中 $m_W = m_Z = g\bar{\phi}/2$, 为方便计, 如同第 3 章, 取电弱混合角为零. 利用此表达式, 亦可计算一般背景 $\bar{\phi}$ 下纵向规范玻色子的散射, 其结果与表 4.1 相似, 只需替换 $\pi^a \rightarrow -iW^a$, 因而这显明验证了一般背景场下的 Goldstone 玻色子等价定理, 同时也可作为对表 4.1 结果的检验.

表 4.1 一般背景场 $\bar{\phi}$ 下 Goldstone 与 Higgs 玻色子中性初末态的树图散射振幅

散射过程	散射振幅
$\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\left[1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2\right] \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{\phi}^2} \frac{(1 + \cos \theta)}{2} E^2$
$\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$\left[1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2\right] \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{\phi}^2} E^2$
$\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$\mathcal{O}(E^0)$
$\pi^+ \pi^- \rightarrow \phi \phi$	$(1-q) \left[3q + (1-2\bar{\xi}^2)(1-2q) - q\bar{\xi}^2\right] \frac{\bar{\xi}^2 \bar{\Omega}^2}{\bar{\phi}^2} E^2$
$\pi^0 \pi^0 \rightarrow \phi \phi$	$(1-q) \left[3q + (1-2\bar{\xi}^2)(1-2q) - q\bar{\xi}^2\right] \frac{\bar{\xi}^2 \bar{\Omega}^2}{\bar{\phi}^2} E^2$
$\pi^0 \phi \rightarrow \pi^0 \phi$	$-(1-q) \left[3q + (1-2\bar{\xi}^2)(1-2q) - q\bar{\xi}^2\right] \frac{\bar{\xi}^2 \bar{\Omega}^2}{\bar{\phi}^2} \frac{(1 - \cos \theta)}{2} E^2$
$\phi \phi \rightarrow \phi \phi$	$\mathcal{O}(E^0)$

现在，我们用表 4.1 的散射振幅研究 Higgs 暴胀期间理论的幺正性。使用耦合道分析，则四种初末态 $|\pi^+ \pi^-\rangle$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}}|\pi^0 \pi^0\rangle$ 、 $|\pi^0 \phi\rangle$ ，和 $\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi \phi\rangle$ 之间的 s 波分波振幅构成 4 阶方阵如下，

$$a_0(E) = \frac{[1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2] \bar{\Omega}^2 E^2}{32\pi \bar{\phi}^2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\Theta & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \Theta & 0 \\ \sqrt{2}\Theta & \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Theta \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

其中，

$$\Theta \equiv \frac{1 + q - (1-q)\bar{\xi}^2}{1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2} \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\Omega}^2}. \quad (4.40)$$

对理论最强的幺正性应来自以上矩阵最大的本征值，即有，

$$\left| \frac{[1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2] \bar{\Omega}^2 E^2}{32\pi \bar{\phi}^2} \left(1 + \sqrt{1 + 3\Theta^2}\right) \right| < \frac{1}{2}, \quad (4.41)$$

因此可得给定 Higgs 背景 $\bar{\phi}$ 与非最小耦合 ξ 时，对散射能量 E 的限制如下，

$$E < \sqrt{\frac{16\pi \bar{\phi}^2}{\bar{\Omega}^2 [1 - (1-q)^2 \bar{\xi}^2] (1 + \sqrt{1 + 3\Theta^2})}}. \quad (4.42)$$

在给定 ξ 时，上式右端是 $\bar{\phi}$ 的单调增函数。我们在图 4.1(a) 中选取 $\xi = (10, 10^2, 10^3, 10^4)$

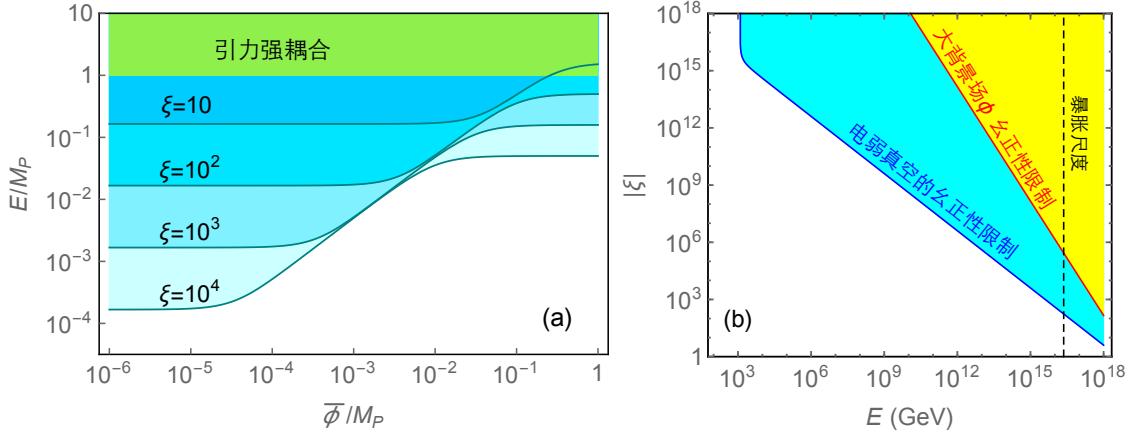


图 4.1 一般背景场 $\bar{\phi}$ 下非最小耦合 ξ 的幺正性限制. (a) 给定非最小耦合 $\xi = (10, 10^2, 10^3, 10^4)$ 时, 破坏树图幺正性的散射能量 E 作为背景场 $\bar{\phi}$ 的函数. 其中, 蓝色阴影表示破坏树图幺正性的区域, 而绿色阴影对应于散射能量大于 M_P , 因而表示引力的非微扰效应不可忽略的区域. (b) 给定背景场 $\bar{\phi} = v$ 和 $\bar{\phi} = M_P/\sqrt{\xi}$ 时, 对 $|\xi|$ 的幺正性限制作为散射能量的函数. 其中, 蓝色阴影代表电弱真空 $\bar{\phi} = v$ 中破坏幺正性的区域, 黄色阴影代表取背景场 $\bar{\phi} = M_P/\sqrt{\xi}$ 时破坏幺正性的区域, 虚线代表暴胀时能量密度的数量级.

画出此幺正性限制. 由图易见, 在 $\bar{\phi} \ll M_P/\xi$ 时, 幺正性限制趋于 $E \lesssim M_P/\xi$, 即 3.2 节所得的电弱真空的结果, 亦对应于图 4.1(b) 中的浅蓝色阴影; 而在 $\bar{\phi} \gg M_P/\sqrt{\xi}$ 的区域, 幺正性限制放松为 $E \lesssim M_P/\sqrt{\xi}$. 这一点也可通过 (4.42) 式理解, 即, 若取电弱真空 $\bar{\phi} = v$, 则 $q \simeq 0$, $\Theta \simeq \xi^2$, 式 (4.42) 退化到 (3.64) 式. 另一方面, 在 Higgs 暴胀期间, $\bar{\phi} \sim \mathcal{O}(M_P/\sqrt{\xi})$, 因而 $\bar{\xi} \ll 1$, $\Theta \simeq \bar{\xi}^2/\bar{\Omega}^2 \ll 1$, 于是 (4.42) 式退化为 $E < \sqrt{8\pi}\bar{\phi}/\bar{\Omega} \sim \mathcal{O}(M_P/\sqrt{\xi}) \gg \mathcal{O}(M_P/\xi)$. 因而, Higgs 暴胀期间的能量密度 $E \sim M_P/\xi$ 没有超出以上幺正性限制. 这意味着, 用经典理论 (作为微扰论的领头阶) 处理 Higgs 暴胀是合适的.

在图 4.1(b) 中, 我们在 3.2 节图 3.7 的基础上进一步加入取背景场 $\bar{\phi} = M_P/\sqrt{\xi}$ 时的幺正性限制. 其中, 蓝色阴影和黄色阴影分别对应于电弱真空 $\bar{\phi} = v$ 和暴胀期间 $\bar{\phi} = M_P/\sqrt{\xi}$ 的结果. 从中可见, 暴胀期间的幺正性限制 (黄色阴影) 弱于电弱真空中的幺正性限制 (蓝色阴影), 而 Higgs 暴胀对应于 ($E \simeq 10^{16}$ GeV, $\xi \simeq 10^4$), 因而在图 4.1(b) 中黄色阴影 (以及图 4.1(a) 中蓝色阴影) 之外.

上述计算皆在 Einstein 系中进行. 如同 3.2 节, 亦可考虑在 Jordan 系中做类似计算. 对于不包含 ϕ 的过程, 此计算是直接的. 例如, 对于 $\pi^+\pi^- \rightarrow 2\pi^0$, 由 s 道 ϕ 场贡献的部分在 Jordan 系和 Einstein 系中相同, 而 Jordan 系中 s 道的引力子场贡献等于 Einstein 系中四顶点图的贡献, 因而两者相等. 然而, 对于包含 ϕ 的

过程, Jordan 系的计算较复杂, 这是由于 Jordan 系中引力子场和 ϕ 场的混合, 导致 ϕ 的三点、四点相互作用中亦有来自 $\sqrt{-g}\mathcal{R}$ 中高阶项的贡献. 而在 Einstein 系中, 此部分贡献已被完全转移到 ϕ 场自己的高阶项中, 因而要容易得多. 这也是在 Einstein 系中计算的优点之一.

最后值得提到, 在 Higgs 暴胀的临界参数空间中 (见 4.4 节), 由于 Higgs 暴胀势被 $\lambda \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ 所压低, 所以幺正性条件亦被满足. 另外, 文献中亦有将 Higgs 暴胀理论幺正化的尝试, 如加入新的标量粒子 [190], 或借助渐进安全的量子引力 [180, 191]. 当然, 本节结果显示, Higgs 暴胀自身本无幺正性问题, 故而无需被幺正化; 但这些将 Higgs 暴胀推广到新物理模型的工作, 的确是有益的尝试. 因为, 我们将在下一节看到, 加入量子修正后, Higgs 暴胀将无可避免地需要新物理的帮助, 方可解决其势能在暴胀期间小于零的致命困难.

4.4 Higgs 暴胀的量子修正

标准 Higgs 暴胀的基础是包含标准模型与广义协变的有效理论, 且此理论的适用范围至少包含从电弱能标 (10^2GeV) 到暴胀尺度 (约 10^{16}GeV) 的 14 个数量级. 因而, 定量研究此模型在对撞机实验与宇宙学观测上的可检验后果, 就必须考虑重整化群效应, 亦即, 必须考虑量子修正对 4.2 节经典结果的影响.

在 4.2 节, 我们看到, 标准 Higgs 暴胀对暴胀观测量的预言只依赖于 $\xi \gg 1$ 的事实, 因而与模型参数几乎无关. 目前已知的暴胀观测量对该模型唯一的限制来自自量谱的幅度 P_ζ , 它确定了模型中 Higgs 场自耦合 λ 与非最小耦合之平方 ξ^2 的比值 λ/ξ^2 . 若由 Higgs 玻色子的质量输入 $\lambda \simeq 0.13$, 则可确定 $\xi \sim 10^4$. 然而, 如此量级的非最小耦合极难通过目前的对撞机实验予以探测 (见 3.2 节). 在此意义上, 量子修正似乎并不是至关紧要的效应, 因为只要 λ 在经过量子修正后, 在暴胀尺度 10^{16}GeV 的大小偏离其电弱能标处的取值 0.13 不过 1 个数量级, 则由 λ/ξ^2 为定值可知, $\xi \gg 1$ 的条件仍然满足, 所以 Higgs 暴胀中前两个慢滚参数对量子修正不敏感.

然而, 目前 Higgs 玻色子质量和顶夸克质量的测量结果对 λ 的重整化群跑动有戏剧性的影响. 若输入 Higgs 质量 [192] $m_h = 125.09 \pm 0.24\text{GeV}$, 以及顶夸克质量 [193] $m_t = 173.34 \pm 0.76\text{GeV}$, 则使用直到两圈图的 β 函数, 可知 λ 在大约 10^{16}GeV 以下时皆随着能量的升高而减小, 且在大约 $10^{10} \sim 10^{11}\text{GeV}$ 时减小为 0, 并在更高的能量成为负值. 由于 λ 降至 0 的尺度指数敏感地依赖于 Higgs 质量与顶夸克质量, 因此其测量误差对此尺度的计算有很大影响.

如若 Higgs 的自耦合 λ 在很高的能量成为负值, 则 Higgs 势 $V(\phi) \sim \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ 在

高能时亦会取到负值。考虑到标量势在大场极限下应有下界，这意味着 Higgs 势除了 $\phi \simeq 246\text{GeV}$ 的电弱真空之外，在 $\phi \gtrsim 10^{11}\text{GeV}$ 的区域会产生新的真空，且其真空能很有可能低于电弱真空，致使当前宇宙所在的电弱真空成为伪真空（false vacuum）。此即标准模型 Higgs 势的真空稳定性问题。

伪真空对于当前宇宙而言并不一定是严重的问题，因为只要电弱真空中向另一个能量更低真空的衰变几率足够小，则仍可保证当前宇宙处于亚稳定的（meta-stable）真空。但是，这对早期宇宙、特别是暴胀时期的宇宙而言则是关键的问题。因为，暴胀期间宇宙的能量可远高于 10^{11}GeV ，如若 Higgs 场在此时获得大于 $\sim \mathcal{O}(10^{11})\text{GeV}$ 量级的真空涨落，则会落入能量更低的真空，从而无法产生我们今天所见的处在电弱真空的宇宙。

假若驱动暴胀的真空能来自 Higgs 场之外的另一种标量场，则可通过分析暴胀时期 Higgs 场的量子涨落，以推算 Higgs 场最终落入电弱真空的概率。分析发现 [194–196]，在暴胀时期，由于背景时空曲率很大，因而对 Higgs 场的二次项有可观的正贡献；与此同时，Higgs 场在 $\phi = 0$ 处的量子涨落并不一定将其抛入能量更低的真空，因而这可保证 Higgs 场在暴胀时期仍有相当的概率留在电弱真空。然而，当暴胀结束、重加热过程开始后，时空背景曲率将迅速减小，与此同时，Higgs 场的真空涨落仍然很可能大于 $\sim \mathcal{O}(10^{11})\text{GeV}$ 。因而，关于标准模型 Higgs 场的真空稳定性是否一定与单场慢滚暴胀相悖，仍是未决的问题。

另一方面，如若暴胀子就是 Higgs 粒子，则要求 Higgs 场在暴胀期间大至 Planck 尺度。如此大的背景值使得真空稳定性成为 Higgs 暴胀的致命问题。除非 Higgs 质量和顶夸克质量的实验值在今后更多更精确的实验测量中有显著改动，使得顶夸克质量能低至 171GeV 左右，一般而言，都需要新物理以改善 Higgs 势在高能时的行为，使得 Higgs 粒子的真空能足以提供成功的宇宙暴胀。更多相关讨论可见 [197–199]。

以下，我们首先介绍标准模型 Higgs 自耦合常数 λ 地跑动，及相关的 Higgs 真空稳定性问题，随后讨论 Higgs 暴胀势的量子修正及由此产生的度规任意性。最后，我们讨论 Higgs 暴胀在加入量子修正后扩大了的参数空间，及其对暴胀观测量的影响。

4.4.1 Higgs 真空稳定性问题

已如前述，根据 Higgs 质量与顶夸克质量的现有实验结果，Higgs 的自耦合常数随能量的上升而下降，并在大约 10^{11}GeV 的能量尺度降到负值。为介绍其中细节，我们首先回顾 Higgs 自耦合常数的重整化群跑动。

Higgs 场的自耦合常数 λ 对能量尺度 μ 的依赖由重整化群方程 $\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \beta_\lambda$ 描述, 其中 β_λ 是 λ 的 β 函数, 依赖于标准模型中各耦合常数. 在一圈图, 只有 Higgs 场直接参与的相互作用会贡献 β_λ , 其结果为,

$$\beta_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[24\lambda^2 - 6y_t^4 + \frac{3}{8} \left(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2 \right) + \lambda(-9g^2 - 3g'^2 + 12y_t^2) \right], \quad (4.43)$$

其中 (g, g') 是 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的规范耦合常数, y_t 是 Higgs 场与顶夸克的 Yukawa 耦合. 考虑到费米子与 Higgs 场的耦合常数 $y_i = \sqrt{2}m_i/v$ 在领头阶正比于其质量 m_i , 而顶夸克质量 $m_t \simeq 173\text{GeV}$ 给出 $y_t \simeq \mathcal{O}(1)$, 而其余费米子质量 m_i 都远小于顶夸克质量 m_t , 给出 $y_i \ll 1$, 因而这里略去了除顶夸克外的所有其他标准模型费米子.

由于含有费米子圈的一圈图相对于玻色子有额外的负号, 在 (4.43) 中由顶夸克圈贡献的 y_t^4 项相对于 Higgs 圈的贡献 $\propto \lambda^2$ 和规范玻色子圈的贡献 $\propto (g, g')^4$ 多一个负号. 又, 在树图阶 $\lambda = m_h^2/(2v^2)$ 而 $y_t = \sqrt{2}m_t/v$, 故 β_λ 随 Higgs 质量的增大而增大、随顶夸克质量的增大而减小. 如若 β_λ 过大 (即 Higgs 过重), 则会使 λ 在某个低于 Planck 能标的尺度大于 1、从而使微扰论失效; 反之, 若 β_λ 过小 (即 Higgs 过轻), 则会使 λ 在低于 Planck 能标的某能量尺度小于 0、从而破坏 Higgs 真空的稳定性. 在 Higgs 粒子被发现之前、而标准模型其余各参数皆在不同精度上已知的情况下, 这两者分别构成了对 Higgs 质量的理论上限与下限, 即微扰性限制 (或称平庸性限制, triviality bound) 和稳定性限制 (stability bound).

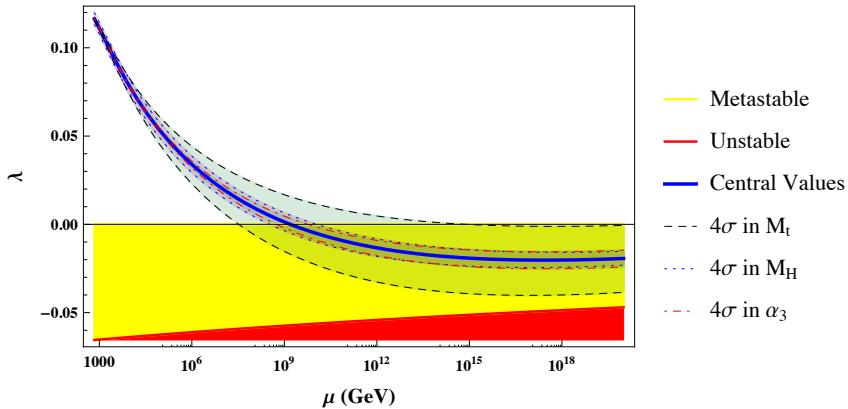


图 4.2 Higgs 自耦合常数 λ 作为重整化尺度 μ 的函数 (取自 [173]). 其中, 黄色与红色的阴影分别对应于电弱真空亚稳定与不稳定的区域. 蓝色曲线周围的宽阴影考虑了 Higgs 质量 m_h 、顶夸克质量 m_t , 与强耦合常数 α_s 测量值的不确定度.

自 2012 年 Higgs 粒子被发现以来, 其质量已被相当准确地测量, 目前其精度甚至超过了顶夸克质量. 同时, 由于目前的 Higgs 质量和顶夸克质量在 4 个标准偏差的置信度上位于 Higgs 真空的亚稳区, 换言之, Higgs 质量相当轻、但并不过

分，因而 Higgs 真空究竟（亚）稳定与否很大程度上依赖于实验测量的精度。此处借用 [173] 的结果，在图 4.2 与图 4.3 中展示目前的实验结果与 Higgs 真空稳定性限制间的关系^①。

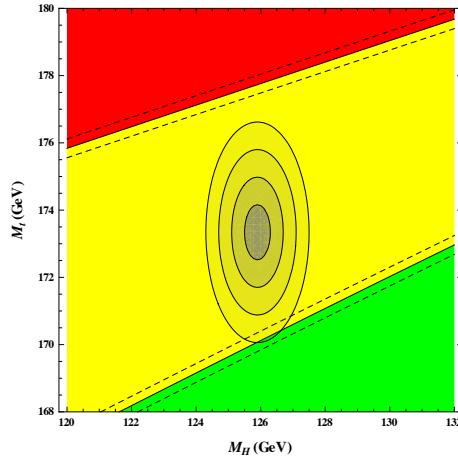


图 4.3 顶夸克质量 m_t 与 Higgs 质量 m_h 的实验值（椭圆阴影）与 Higgs 真空的稳定性限制。（取自 [173]）其中，椭圆阴影自内而外对应于 1 至 4 个标准偏差的测量结果，而红、黄、绿色区域分别对应于电弱真空不稳定、亚稳定、和稳定的参数取值。

4.4.2 Higgs 暴胀势的量子修正

现在我们考虑 Higgs 暴胀势的量子修正。[4.2](#) 节提到，非最小耦合项 $\xi \mathcal{R} H^\dagger H$ 的出现将修改标准模型的 Higgs 势。在树图阶，这修改有两方面，一是 Einstein 系中的标量势有额外的 Weyl 因子，即 [\(4.26\)](#) 式；二是 Higgs 场 h 须被正则归一化为 χ 场，即 [\(4.28\)](#) 式。在计算标量势的一圈图修正时，非最小耦合 ξ 又造成若干新的问题。

首要的问题是，应当在 Jordan 系、还是在 Einstein 中计算量子涨落？因为最终的暴胀分析须在 Einstein 系中做^②，所以这问题等价于，应当先在 Jordan 系中计算量子修正、然后再做 Weyl 变换（文献中称为规定 II, Prescription II），还是反过来，先做 Weyl 变换，然后在 Einstein 系中计算量子修正（文献中称规定 I）？原则上，物理结果应与人为的计算手续无关，然而这里的具体问题相当微妙。在文献中，用这两种方法得到的结果并不一定相同 [\[141\]](#)，且在一定情况下（即所谓临界情形，见 [4.4.3](#) 节），这差别可导致张标比有量级的差别。已有计算中的规定 I 与规定 II 何者正确、抑或两者对应于两种不同的模型，仍是未决问题。以下我们简要介绍规定 I 和规定 II 的做法，然后对此作出评论。

^①注意，LHC 对 Higgs 质量测量的最新结果 [\[192\]](#) 略小于 [\[173\]](#) 中分析所用的值。

^②能否不借助 Weyl 变换而纯粹在 Jordan 系中处理 Higgs 暴胀，仍是开放问题。

首先考虑规定 I, 即, 先对 Jordan 系的经典作用量作 Weyl 变换, 然后从所得的 Einstein 系作用量为基础计算有效势. 在 Einstein 系中, 树图阶的标量势为 $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\Omega^{-4}\phi^4$, 按照标准的计算方法 [200, 201], 将 Higgs 场 H 在一恒定的常值背景 $\bar{\phi}$ 上展开, $H = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi})^T + (\pi^+, \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + i\pi^0))$, 则有效势 $V(\bar{\phi})$ 的一圈修正可通过在路径积分中积去涨落场 (包括所有与 Higgs 背景耦合的标准模型场) 而得,

$$\begin{aligned} \Delta V^{(E)} = & \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{3M_{W(E)}^4}{2} \left(\log \frac{M_{W(E)}^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) + \frac{3M_{Z(E)}^4}{4} \left(\log \frac{M_{Z(E)}^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) \right. \\ & - 3M_{t(E)}^4 \left(\log \frac{M_{t(E)}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{M_{\varphi(E)}^4}{4} \left(\log \frac{M_{\varphi(E)}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\ & \left. + \frac{3M_{\pi(E)}^4}{4} \left(\log \frac{M_{\pi(E)}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

其中, μ 为重整化尺度, 而 $M_{i(E)}$ 为一圈图中圈粒子 i 的有效质量, 可通过计算涨落场的二次项求得如下,

$$M_{W(E)}^2 = \frac{g^2 \bar{\phi}^2}{4\bar{\Omega}^2}, \quad (4.45a)$$

$$M_{Z(E)}^2 = \frac{(g^2 + g'^2)\bar{\phi}^2}{4\bar{\Omega}^2}, \quad (4.45b)$$

$$M_{t(E)}^2 = \frac{y_t^2 \bar{\phi}^2}{2\bar{\Omega}^2}, \quad (4.45c)$$

$$M_{\varphi(E)}^2 = \frac{3\lambda\bar{\phi}^2}{\bar{\Omega}^4} \frac{1 - \xi\bar{\phi}^2/M_p^2}{\bar{\Omega}^2 + 6\xi^2\bar{\phi}^2/M_p^2}, \quad (4.45d)$$

$$M_{\pi(E)}^2 = \frac{\lambda\bar{\phi}^2}{\bar{\Omega}^4}, \quad (4.45e)$$

其中 $\bar{\Omega}^2 = 1 + \xi\bar{\phi}^2/M_p^2$ 仍如 4.3 节定义. 注意, 相当于经典势中 Ω^{-4} 因子的部分已被吸收进各个有效质量的表达式中.

再考虑规定 II, 即直接于 Jordan 中计算一圈图的有效势. 同前方法, 可得 Jordan 系中一圈图有效势, 与 Einstein 系的有效势 (4.44) 有完全相同的形式, 除了所有的有效质量 $M_{i(E)}^2$ 皆须替换为如下 Jordan 系下的结果 $M_{i(J)}^2$,

$$\begin{aligned} M_{W(J)}^2 &= \frac{g^2 \bar{\phi}^2}{4}, & M_{Z(J)}^2 &= \frac{(g^2 + g'^2)\bar{\phi}^2}{4}, & M_{t(J)}^2 &= \frac{y_t^2 \bar{\phi}^2}{2}, \\ M_{\varphi(J)}^2 &= \frac{3\bar{\Omega}^2\lambda\bar{\phi}^2}{\bar{\Omega}^2 + 6\xi^2\bar{\phi}^2/M_p^2}, & M_{\pi(J)}^2 &= \lambda\bar{\phi}^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

注意, 上述各量较 Einstein 系的结果 (4.45) 仅相差因子 Ω^{-4} (除了数值上不重要的 $M_{\varphi(J)}^2$). 现在, 将所得结果作 Weyl 变换至 Einstein 系, 则各指数项前的系数都被乘以 Weyl 因子 Ω^{-4} , 从而与 Einstein 系的有效势 (4.44) 有相同的系数 (除了 M_{φ}^4 项).

于是，规定 II 与规定 I 结果的差别几乎只在与对数项中的量。以 W^\pm 圈为例，在规定 I 中其贡献为 $\frac{1}{16\pi^2} \frac{3g^2\bar{\phi}^2}{32\bar{\Omega}^2} \log\left(\frac{g^2\bar{\phi}^2/\bar{\Omega}^2}{4\mu^2}\right)$ 而在规定 II 中为 $\frac{1}{16\pi^2} \frac{3g^2\bar{\phi}^2}{32\bar{\Omega}^2} \log\left(\frac{g^2\bar{\phi}^2}{4\mu^2}\right)$ 。这一差别显然将影响重整化尺度 μ 的选取。因为如果要选取 μ 使得量子修正尽量小，则根据规定 I，应取 $\mu \simeq g\bar{\phi}/\bar{\Omega}$ ，而根据规定 II，应取 $\mu \simeq g\bar{\phi}$ 。

我们将在下一小节解释，对 μ 的这两种不同的选取将如何影响 Higgs 暴胀对观测量的预言。此处，我们就以上两种计算量子修正的程序作一评论。

首先，以规定 I 做计算是相对安全的手续。因为暴胀分析在 Einstein 系中完成，因而从计算的起始处就作 Weyl 变换至 Einstein 系是物理意义明确的做法。此外，3.2 节以及 4.3 节的分析表明，在 Einstein 系中做微扰计算时，可忽略引力子，因为它的贡献不会被 ξ 抬高；反之，在 Jordan 系做计算时，由于 Jordan 系度规上的引力子涨落并未正则归一化，且与标量场有混合，因而其贡献常会有 ξ 的抬高，从而不可忽略。而通常的规定 II 并未考虑之，因而是成问题的。

其次，按照规定 II，需首先在 Jordan 系中计算量子修正，再将所得的有效作用量作 Weyl 变换到 Einstein 系。由于有效作用量已包含经过路径积分而得量子修正，因而包含了路径积分测度中的 Weyl 反常项。这一点在文献中的计算总是被忽略的。事实上，容易看出 [202]，如果将 Weyl 反常适当地考虑进来，则规定 II 的结果与规定 I 几乎一致。特别是，重整化尺度的选取皆为 $\mu \simeq \bar{\phi}/\bar{\Omega}$ 。

再次，无论是规定 I 还是规定 II，皆未考虑背景场 $\bar{\phi}$ 对时间的依赖，以及背景时空曲率对有效质量的贡献。不过，这些贡献应当是次要的。两种计算程序的差别，主要来自 Weyl 反常。

文献中对两种计算手续的异同亦有持续的讨论。有论者认为这来自紫外的量子引力理论的不确定性 [141]。与此类似，[203, 204] 认为规定 I 可追溯到紫外量子引力理论的严格尺度不变性。而与此相对，[205] 认为规定 II 是正确的做法，因为物理距离的测量对应于 Jordan 系的度规。这是较危险的论断，它又回到了 Jordan 系与 Einstein 系的物理（不）等价性的古老争论 [132]。

亦有论者认为 [206, 207]，Weyl 变换作为场变换，可被视为场空间中的坐标变换，所以两种计算手续的差别源于有效势在场空间中坐标变换下不协变。因而，更仔细的做法应考虑场空间中协变的有效作用量，即 Vilkovisky-DeWitt 作用量 [208]。我们认为，这种观点似未切中要害，因为有效作用量本身不是物理观测量，因而物理观测量（如标量功率谱）是否独立于场变换，与有效作用量的行为应无关。不过，认为可观测量与场变量的选取无关，在暴胀宇宙学中同样是一个危险的猜想，原因至少有二：一是，广义相对论中物理观测量的定义相当微妙且不一定是广义协变、更不是 Weyl 不变的；二是，暴胀期间的观测量，即量子涨落的关联函数，

是通过所谓 in-in 体系 (in-in formalism) 计算的. 与通常的 S 矩阵 (相当于 in-out formalism) 不同, in-in 体系中没有定理保证关联函数在场的非线性变换下保持不变 [163].

另外, 亦有文献 [209–211] 将 Jordan 至 Einstein 系的 Weyl 变换简单地归结为物理单位的变换, 或尺度变换, 并以此推论说, 由于实际可测的物理量总是纯数, 因而对某能量尺度的测量实则对某两个能量尺度之比的测量, 所以实际的物理量并不依赖于 Weyl 变换. 我们亦不能完全同意这种论点, 因为 Weyl 变换的确是场变换 (虽然在平空间极限下它可退化为时空的共形变换), 且是度规场的局域变换. 物理可观测量在何种程度上依赖于该度规的选取, 的确是十分棘手的问题, 但无论如何似不可直接视之为物理单位的变换.

对规定 I 和规定 II 的讨论暂止于此. 在本小节余下的部分, 我们转而讨论两个计算上的技术细节, 以备下文所用.

第一个问题是涨落场的归一化. 从 3.2 节和 4.3 节可知, 无论在 Jordan 系还是 Einstein 系, Higgs 场 H 上的涨落场 φ 都未正则归一化, 由此导致其与标准模型粒子的耦合都被一归一化因子压低. 在 Einstein 系里, 一圈图中的每个 Higgs 内线连到两个相互作用顶点, 因而相应的压低因子 s 由 (4.28) 中的 $(d\chi/d\phi)^2$ 给出, 即,

$$s = \left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 = \frac{\Omega^2 + 6\xi^2\phi^2/M_p^2}{\Omega^4}. \quad (4.47)$$

而在 Jordan 系中, 相应的压低因子应为 $\Omega^2(d\chi/d\phi)^2$, 见 [191, 212] 讨论^①.

在计算中, s 因子应被恰当地插入所有包含 Higgs 场内线的圈图中 (注意, Goldstone 场内线不应包含 s 因子), 于是标准模型各耦合常数的 β 函数也须被相应修改. 其直到两圈图的结果可见 [141, 142], 这里录之如下. 同时, 也列出 ξ 的一圈图 β 函数.

$$\beta_{g_s} = \frac{g_s^3}{(4\pi)^2} \left(-7 \right) + \frac{g_s^3}{(4\pi)^4} \left(\frac{11}{6} g'^2 + \frac{9}{2} g^2 - 26g_s^2 - 2sy_t^2 \right), \quad (4.48a)$$

$$\beta_g = \frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(-\frac{39-s}{12} \right) + \frac{g^3}{(4\pi)^4} \left(\frac{3}{2} g'^2 + \frac{35}{6} g^2 + 12g_s^2 - \frac{3}{2} sy_t^2 \right), \quad (4.48b)$$

$$\beta_{g'} = \frac{g'^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{81+s}{12} \right) + \frac{g'^3}{(4\pi)^4} \left(\frac{199}{18} g'^2 + \frac{9}{2} g^2 + \frac{44}{3} g_s^2 - \frac{17}{6} sy_t^2 \right), \quad (4.48c)$$

$$\begin{aligned} \beta_\lambda = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left(6(1+3s^2)\lambda^2 - 6y_t^4 + \frac{3}{8}(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2) \right. \\ & \left. + \lambda(-9g^2 - 3g'^2 + 12y_t^2) \right) \end{aligned}$$

^① [141] 中, Jordan 系和 Einstein 系中的压低因子皆取为 $\Omega^2(d\chi/d\phi)^2$, 疑有误. 不过在 $\xi \gg 1$ 的情形, 只有 ξ^2/M_p^2 项主导而 Ω 中仅含 ξ/M_p^2 , 因而相差一个 Ω^2 因子在数值上不重要.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(4\pi)^4} \left[\frac{1}{48} \left((912 + 3s)g^6 - (290 - s)g^4 g'^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (560 - s)g^2 g'^4 - (380 - s)g'^6 \right) + (38 - 8s)y_t^6 \right. \\
 & \quad \left. - y_t^4 \left(\frac{8}{3}g'^2 + 32g_s^2 + (12 - 117s + 108s^2)\lambda \right) \right. \\
 & \quad \left. + \lambda \left(-\frac{1}{8}(181 + 54s - 162s^2)g^4 + \frac{1}{4}(3 - 18s + 54s^2)g^2 g'^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{24}(90 + 377s + 162s^2)g'^4 + (27 + 54s + 27s^2)g^2 \lambda \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (9 + 18s + 9s^2)g'^2 \lambda - (48 + 288s - 324s^2 + 624s^3 - 324s^4)\lambda^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + y_t^2 \left(-\frac{9}{4}g^4 + \frac{21}{2}g^2 g'^2 - \frac{19}{4}g'^4 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \lambda \left(\frac{45}{2}g^2 + \frac{85}{6}g'^2 + 80g_s^2 - (36 + 108s^2)\lambda \right) \right) \right], \tag{4.48d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{y_t} = & \frac{y_t}{(4\pi)^2} \left[-\frac{9}{4}g^2 - \frac{17}{12}g'^2 - 8g_s^2 + \left(\frac{23}{6} + \frac{2}{3}s \right) y_t^2 \right] \\
 & + \frac{y_t}{(4\pi)^4} \left[-\frac{23}{4}g^4 - \frac{3}{4}g^2 g'^2 + \frac{1187}{216}g'^4 + 9g^2 g_s^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{19}{9}g'^2 g_s^2 - 108g_s^4 + \left(\frac{225}{16}g^2 + \frac{131}{16}g'^2 + 36g_s^2 \right) s y_t^2 \right. \\
 & \quad \left. + 6(-2s^2 y_t^4 - 2s^3 y_t^2 \lambda + s^2 \lambda^2) \right], \tag{4.48e}
 \end{aligned}$$

$$\beta_\xi = \frac{\xi + 1/6}{(4\pi)^2} \left[-\frac{9}{2}g^2 - \frac{3}{2}g'^2 + 6y_t^2 + (6 + 6s)\lambda \right]. \tag{4.48f}$$

使用 2 圈图 β 函数时，在树图阶输入的参量（如 Higgs 质量和顶夸克质量）亦须作一圈图修正，相关方法可见 [213]，此不赘述。

第二个问题是 Higgs 场的波函数重整化。以 Einstein 系（规定 I）为例，在计算有效势的标准方法中，其圈图结果可被紧凑地用下式表达，

$$V(\phi) = \frac{\Gamma^4(\mu)\lambda(\mu)\phi}{4\Omega^4}, \tag{4.49}$$

其中 $\Gamma(\mu) = \exp(-\int_{m_t}^\mu \gamma(\mu') d\log \mu')$ 来自 h 的波函数重整化， γ 是反常量纲。在应用于 Higgs 暴胀时，文献中对此因子的处理不一致。例如，[141, 191] 包含之而 [214, 215] 没有。自然，对于规定 I 和规定 II，以及不同的记号约定，是否需要包含此因子需要单独讨论。就本文所采用的规定 I，以及如上所列的 β 函数而论，不应包含此因子。其原因是，Higgs 场的动能项在计入量子修正后亦包含 $\Gamma^2(\mu)$ 。而为应用 4.1 节单场慢滚的标准公式，暴胀子的动能项需要被归一化，从而，在归一化后，以上势能项中的 Γ^4 因子亦被消去。不过，我们的数值计算发现，此因子对

暴胀观测量的影响极小，故细究是否包含之只是概念上重要的问题。

4.4.3 Higgs 暴胀的参数空间：大 ξ 情形与临界情形

在本节最后，我们讨论 Higgs 暴胀的参数空间。在 4.2 节所考虑的经典理论中，Higgs 自耦合 $\lambda \simeq 0.13$ 与标量功率谱的幅度 $(V/\epsilon)^{1/4} \simeq 0.0276 M_P$ 联合给出 $\xi \sim \mathcal{O}(10^4)$ 。我们称此情形为大 ξ 情形，即 $\xi \gg 1$ 。在 4.2 节我们已看到，这种情形下，Higgs 暴胀所预言的谱指数 $n_s \simeq 0.96$ 和张标比 $r \simeq 10^{-3}$ 独立于模型中各参数的选取。

当考虑进量子修正后，Higgs 自耦合 λ 在暴胀尺度显著降低，在考虑进现有实验误差后，在暴胀尺度有可能十分接近于 0^①，此时 ξ 亦可很小，小至 $\mathcal{O}(10)$ 甚至 $\mathcal{O}(1)$ 。根据标准模型 β 函数，Higgs 的自耦合在 10^{16} GeV 左右取到最小值 [215, 216]，因而，只要此最小值足够小，即使不借助非最小耦合 ξ ，Higgs 势也能在暴胀尺度产生一小的平台。因而，[215–217] 尝试利用这个小平台，加上小的非最小耦合 $\xi \sim \mathcal{O}(10)$ ，以构造成功的暴胀势。此即 Higgs 暴胀的临界情形。此处的临界，是指 Higgs 自耦合在暴胀期间十分接近 0。作此尝试的一个特别的动机来自 2014 年 BICEP2 观测的结果 [218]，即 CMB 上显著的 B 模式。这有可能来自原处引力波，从而提示相当大的张标比 $r \sim \mathcal{O}(0.1)$ 。虽然后来进一步的分析发现 BICEP2 所见的 B 模式大部分都来自前景尘埃的影响 [219]，但构造张标比 r 大至 $\mathcal{O}(0.1)$ 的模型，仍然是有意义的尝试。

在标准 Higgs 暴胀中，临界情形要求 $\lambda \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ ，且要求 Higgs 质量 m_h 、顶夸克质量 m_t ，与非最小耦合 ξ 间满足一高度微调的关系 [215]。因而在临界区域，暴胀观测量对模型参数的输入极其敏感。实际上，[220] 认识到，这一微调条件也许根本无法为标准模型参数所满足。因而，构造临界情形的 Higgs 暴胀，似乎无可避免地需要新物理的帮助。我们将在 5.1 节详细描述这类新物理模型的一个例子。

最后值得指出，对 Higgs 暴胀势做量子修正的规定 I 和规定 II 在临界情形有定性的区别。如 [215, 220] 分析指出，规定 I 如同大 ξ 情形，导致近似指数平坦的暴胀势（但第一慢滚参数 ϵ 显著地大），而规定 II 则如同平方势的暴胀 $V \simeq m^2 \phi^2$ ，从而其预言与平方混沌暴胀类似。亦有文献 [221] 以 Einstein 的平方势为条件，反推 Jordan 系 Higgs 场的作用量，这自然是凿痕很重的做法。

^①更合理的可能性是，Higgs 自耦合由于新物理的作用在暴胀尺度降到很小的正值。

第 5 章 Higgs 暴胀：超越标准模型

在前文中我们反复提到，粒子物理的标准模型很可能不是描写微观物理的最终理论，很多原因驱使我们考虑超出标准模型的新物理。特别是 Higgs 真空的稳定性问题，即标准模型的 Higgs 势在大约 10^{11}GeV 之上小于零，将有可能导致 TeV 尺度的电弱对称性破缺所依赖的 Higgs 真空在宇宙早期不稳定。这问题对于 Higgs 暴胀而言尤其关键，因为如若 Higgs 势早在 10^{11}GeV 左右就降到零以下，那么利用 Higgs 的真空能驱动宇宙暴胀就无从谈起了。因此，当我们考虑 Higgs 暴胀时，就不应局限于标准模型，而是应当考虑超出标准模型的各种可能性。

本章讨论超出标准模型的 Higgs 暴胀的三类典型模型。

在第一类模型中，我们考虑 TeV 尺度的重粒子对 Higgs 势的影响。许多新物理模型都预言了 TeV 尺度的新粒子。此处，我们主要着眼于这些粒子对 Higgs 势稳定性的改善，即，它们与 Higgs 粒子的相互作用将修改 Higgs 自耦合常数的跑动行为，因此可以避免 Higgs 势在高能区 ($\gtrsim 10^{11}\text{GeV}$) 出现新的真空。另一方面，在适当的参数选取下，Higgs 自耦合常数在暴胀尺度 ($\sim 10^{16}\text{GeV}$) 恰取到最小值，因此 Higgs 势在此处可不借助很大的非最小耦合而变得平坦。

在第二类模型中，我们考虑超对称理论。超对称理论在 TeV 尺度引入若干新的重粒子，它们与 Higgs 粒子的相互作用修改了 Higgs 自耦合常数的重整化群跑动行为，因此可以解决标准模型中 Higgs 势的稳定性问题。然而，将标准模型 Higgs 暴胀直接推广到超对称理论中存在诸多困难。简言之，困难之一是 Higgs 暴胀所依赖的非最小耦合项在超引力中不易写出，其二是超对称理论所引入的新的标量自由度时常会造成暴胀轨道的不稳定性。为克服这些困难，在模型构造中常需要一些刻意的设计。我们将在本章讨论一大类能够自然地克服这些困难的模型。这些模型借助无标超引力的结构，无需 Higgs 与引力的非最小耦合项，就能给出相当平坦的暴胀势。

最后，我们讨论渐进安全的量子引力理论对 Higgs 势的影响。引力的渐进安全行为将导致紫外固定点的出现。我们将看到，这固定点可以在高能导致正定且平坦的 Higgs 势，因而有可能提供一种新的 Higgs 暴胀模型。在这类模型中，仍然不需要 Higgs 与引力的非最小耦合。

5.1 Higgs 暴胀与 TeV 质量的重粒子

作为扩展标准模型 Higgs 暴胀的第一个例子，我们考虑一种简化的现象学模型^[222]，即，在标准模型中加入一对质量在 TeV 尺度的玻色子和费米子，且都与 Higgs 场有耦合。

由 4.4 节讨论，Higgs 真空的稳定性问题源于标准模型中 β_λ 在大约 10^{16}GeV 以下为负，由此导致 λ 在 $\sim \mathcal{O}(10^{11})\text{GeV}$ 变成负值。而 β_λ 之所以为负，是因为 Higgs 玻色子“过轻”而顶夸克“过重”，这导致 Higgs 的自耦合常数 λ “太小”而顶夸克和 Higgs 场的耦合“太大”。一般而言，与 Higgs 场相耦合的玻色子对 Higgs 场自耦合 λ 的 β 函数（记为 β_λ ）有正的贡献，而费米子有负的贡献。因此，引入新的玻色子有助于改善 Higgs 真空的稳定性问题，而引入新的费米子则会使此问题更严重。

由此，我们似乎可以期望，通过在标准模型中仅加入一个新的玻色子以解决稳定性问题。然而，这种最简的方案并不理想。原因是，Higgs 玻色子的质量（ 125GeV ）非常接近其稳定性下限，处于“亚稳区”，这种临界的取值对粒子参数的变动非常敏感。例如，容易看到，通过 Higgs 稳定性限制导出的能量上限指数敏感地依赖于 Higgs 粒子和顶夸克的质量（见 4.4 节）。因此，仅仅加入一个新的玻色子，在解决了稳定性问题的同时，却有可能在 Planck 尺度之下就遇到微扰性问题，除非对模型的参数作相当精细的微调。所以，解决此问题的更自然的方式，是在加入新玻色子的同时，也引入新的费米子，使这些新粒子对 β_λ 的贡献几乎相抵消，而这抵消的残余即可用来改善 λ 在高能跑到负值的问题。

初看上去，这种构造需要过多的参数微调，因而显得不自然。其实这只是此处考虑的简化的现象学模型的问题。在更完整的新物理模型中，上述的参数微调可被更自然地实现。例如，超对称理论中，在超对称破缺尺度之上，任何一对互为超对称伴子的玻色 / 费米子对 Higgs 自耦合跑动 β_λ 的贡献都严格相消。基于这种考虑，[223] 认为一个轻的 Higgs 玻色子（例如 125GeV ）将暗示超对称的存在。因此，本节所研究的模型亦可被视为一种简化的类超对称理论。我们将在下一节仔细研究完整的超对称理论中的 Higgs 暴胀。

5.1.1 模型结构

现在我们介绍本节所讨论模型的结构。此模型在标准模型的基础上，另引入一个新的电弱单态玻色子，记之为 \mathcal{S} ，以及一个矢量型 Dirac 费米子 \mathcal{T} ，具有与右手顶夸克相同的标准模型量子数^①。与此同时，我们亦引入新的离散对称性 \mathbb{Z}_2 。为清晰

^① 关于类似的矢量型费米子的现象学，可见 [224–226]。

起见，我们将标准模型 Higgs 场、第三代夸克 (Q_{3L}, t_R, b_R)，以及新粒子 (\mathcal{S}, \mathcal{T}) 在电弱规范群 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 以及 \mathbb{Z}_2 下的表示总结于表 5.1，其中 $Q_{3L} = (t, b)_L^T$. 与此同时，其余所有粒子的电弱量子数同标准模型，且在 \mathbb{Z}_2 下为正.

表 5.1 第三代夸克、Higgs 场与 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 场在电弱规范群及离散群 \mathbb{Z}_2 下的表示

对称群	Q_{3L}	t_R	b_R	\mathcal{T}_L	\mathcal{T}_R	H	\mathcal{S}
$SU(2)_L$	2	1	1	1	1	2	1
$U(1)_Y$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
\mathbb{Z}_2	—	—	—	+	—	+	—

根据表 5.1，可列出该模型可重整的标量势如下，

$$V(H, \mathcal{S}) = -\mu_1^2 H^\dagger H - \frac{1}{2}\mu_2^2 \mathcal{S}^2 + \lambda_1(H^\dagger H)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2 \mathcal{S}^4 + \frac{1}{2}\lambda_3 \mathcal{S}^2 H^\dagger H + \kappa \mathcal{S}. \quad (5.1)$$

这里， $H = (\pi^+, \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + \pi^0))^T$ 仍同标准模型一样，获得真空期望值 $\langle H \rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$. 一如既往， $v \simeq 246\text{GeV}$. 与此同时， \mathcal{S} 的质量项为负，它使 \mathcal{S} 获得非零的真空期望值 $u \equiv \langle \mathcal{S} \rangle \sim \mathcal{O}(\text{TeV}) \gg v$ ，从而使离散对称性 \mathbb{Z}_2 自发破缺. 我们要求所有的相互作用项满足 \mathbb{Z}_2 ，于是标量势中唯一可破坏 \mathbb{Z}_2 的非相互作用项即为 $\kappa \mathcal{S}$. 它对 \mathbb{Z}_2 的软破缺可避免离散对称性自发破缺在宇宙学上的相域墙问题 (domain wall problem) [227]. 同时，标量势 V 有下界，要求 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 以及 $\lambda_1 \lambda_2 > \frac{1}{4}\lambda_3^2$. 此外，真空期望值 (v, u) 与标量势 V 各参数的关系可通过 V 的极值条件确定如下，

$$\begin{cases} \mu_1^2 = \lambda_1 v^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 u^2, \\ \mu_2^2 = \frac{1}{2}\lambda_3 v^2 + \lambda_2 u^2 + \frac{\kappa}{u}. \end{cases} \quad (5.2)$$

在典型的参数选取中， \mathbb{Z}_2 破缺项的系数 κ 很小，即有 $\kappa/v^3 \ll 1$. 例如，可取 $\kappa \sim (1\text{GeV})^3$. 因此在以上方程中，可视 κ 项为微扰，从而可解之以 $v = v_0 + v_\kappa$ ， $u = u_0 + u_\kappa$ ，其中 v_κ 与 u_κ 为正比于 κ 的小量，

$$v_0^2 = \frac{2(2\lambda_2\mu_1^2 - \lambda_3\mu_2^2)}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}, \quad v_\kappa \simeq \frac{\lambda_3}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2} \frac{\kappa}{v_0 u_0}, \quad (5.3a)$$

$$u_0^2 = \frac{2(2\lambda_1\mu_2^2 - \lambda_3\mu_1^2)}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}, \quad u_\kappa \simeq \frac{\lambda_1\kappa}{\lambda_3\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}. \quad (5.3b)$$

接下来讨论该模型中涉及第三代夸克以及 \mathcal{T} 的 Yukawa 项，依据表 5.1，我们有，

$$\mathcal{L}_{t\mathcal{T}} = -y_1 \bar{Q}_{3L} \widetilde{H} t_R - y_2 \bar{Q}_{3L} \widetilde{H} \mathcal{T}_R - \frac{y_3}{\sqrt{2}} \mathcal{S} \bar{\mathcal{T}}_L \mathcal{T}_R - \frac{y_4}{\sqrt{2}} \mathcal{S} \bar{\mathcal{T}}_L t_R + \text{h.c.}, \quad (5.4)$$

其中 $\widetilde{H} = i\tau_2 H^*$. 上式未包含 $\bar{Q}_{3L} H b_R$ 项，是因为 b_R 与 \mathcal{T} 无混合，故而该项与目前的问题无关。同时，上式中最后一项，即 y_4 项，总可通过场的重定义 $\mathcal{T}_R \rightarrow \mathcal{T}_R - (y_4/y_3)t_R$ 被消去，因此下文只考虑独立的 Yukawa 耦合 (y_1, y_2, y_3) 。另外值得提到，此模型的 \mathbb{Z}_2 对称性避免了 (t, \mathcal{T}) 夸克与前两代夸克间形成可重整的混合项。它们之间的混合至少需要从量纲为 5 的项产生，如 $\bar{Q}_{jL} \widetilde{H} t_R \mathcal{S}$ 与 $\bar{Q}_{jL} \widetilde{H} \mathcal{T}_R \mathcal{S}$ ，其中 $j = 1, 2$ 表示前两代。这些项被其紫外截断尺度所压制，从而可解释 CKM 矩阵中前两代与第三代的为何仅有很小的混合。

以上介绍了该模型拉格朗日量中相关的各项。现在我们研究其质量谱。首先，Higgs 场 h 和单态粒子 S 的质量矩阵 M_s 可被对角化如下，

$$M_s^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 v^2 & \lambda_3 v u \\ \lambda_3 v u & \lambda_2 u^2 \end{pmatrix} = U(\alpha) \begin{pmatrix} m_h^2 & 0 \\ 0 & m_S^2 \end{pmatrix} U(\alpha)^T. \quad (5.5)$$

这里的转动矩阵为，

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \tan \alpha = \frac{\lambda_1 x^2 - \lambda_2 z_h^2}{\lambda_3 x (1 + z_h^2)}, \quad (5.6)$$

其中 $x \equiv v/u \ll 1$ 而 $z_h \equiv m_h/m_S$ ，而质量本征值 (m_h, m_S) 为，

$$m_h^2 = \frac{u^2}{2} \left[(\lambda_1 x^2 + \lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1 x^2 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_3^2 x^2} \right], \quad (5.7a)$$

$$m_S^2 = \frac{u^2}{2} \left[(\lambda_1 x^2 + \lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1 x^2 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_3^2 x^2} \right]. \quad (5.7b)$$

为使符号简洁，如无特别说明，以下径以 (h, S) 标记质量本征态。由此，可用标量粒子的质量 (m_h, m_S) 和混合角 α 表出标量势中的耦合常数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 如下，

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m_h^2 \cos^2 \alpha + m_S^2 \sin^2 \alpha}{2v^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{m_h^2 \sin^2 \alpha + m_S^2 \cos^2 \alpha}{2u^2}, \\ \lambda_3 &= \frac{m_S^2 - m_h^2}{2vu} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.8)$$

其次，费米子 (t, \mathcal{T}) 的质量矩阵 M_f 为，

$$M_f = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_3/x \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

于是，对称矩阵 $M_f M_f^\dagger$ 可通过左手转动矩阵 $U(\theta)$ 对角化如下，

$$M_f M_f^\dagger = U(\theta) \begin{pmatrix} m_t^2 & 0 \\ 0 & m_{\mathcal{T}}^2 \end{pmatrix} U^\dagger(\theta), \quad \tan \theta = \frac{x^2(y_1^2 + y_2^2) - z_t^2 y_3^2}{x(1 + z_t^2)y_2 y_3}, \quad (5.10)$$

其中 $z_t \equiv m_t/m_{\mathcal{T}} \ll 1$, 而质量本征值 $(m_t, m_{\mathcal{T}})$ 为,

$$m_t^2 = \frac{u^2}{4} [x^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2] \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4x^2 y_2^2 y_3^2}{[x^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2]^2}} \right), \quad (5.11a)$$

$$m_{\mathcal{T}}^2 = \frac{u^2}{4} [x^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2] \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4x^2 y_2^2 y_3^2}{[x^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2]^2}} \right). \quad (5.11b)$$

以下, 径使用 (t, \mathcal{T}) 表示质量本征态. 与玻色子部分类似, 可将 Yukawa 镶合 (y_1, y_2, y_3) 用质量本征值 $(m_t, m_{\mathcal{T}})$ 与混合角 θ 表出为,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2} z_t}{v \sqrt{z_t^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}, \\ y_2 &= \frac{(1 - z_t^2) \sin 2\theta}{v \sqrt{2(z_t^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}}, \\ y_3 &= \frac{m_{\mathcal{T}}}{u} \sqrt{2(z_t^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

最后, 如同标准模型 Higgs 暴胀, 此处亦引入 Higgs 场与引力的非最小耦合项,

$$\mathcal{L}_{\text{NMC}} = \sqrt{-g} \xi \mathcal{R} H^\dagger H. \quad (5.13)$$

原则上, 在量纲为 4 的项中, 亦有形如 $\mathcal{R}\mathcal{S}^2$ 的非最小耦合. 但它与目前的模型无关, 因此略去.

至此, 我们已介绍了该模型的结构, 包括标量势、Yukawa 相互作用、标量粒子与夸克 (t, \mathcal{T}) 的质量谱, 以及暴胀所需的非最小耦合项. 以下, 我们将其应用于暴胀过程的分析.

5.1.2 暴胀势与暴胀观测量

一如对标准模型 Higgs 暴胀的处理, 我们在 Einstein 系中分析暴胀过程. 与标准模型 Higgs 暴胀相同, 我们亦取 Higgs 场作为暴胀子. 由于标量势 (5.1) 仅通过模 $|H|$ 依赖于 Higgs 场 H , 故可取暴胀子为 $h = \frac{1}{\sqrt{2}} |H|$. 下文将说明, 在暴胀期间 $\mathcal{S} = 0$, 从而暴胀势 $V(h)$ 只是暴胀子 h 的函数, 且其形式与标准模型 Higgs 暴胀相同. 现在, 可写下 Einstein 系中暴胀子 h 的拉格朗日量为,

$$\mathcal{L}_h = \sqrt{-g} \left[\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2/M_p^2}{2\Omega^4} (\partial_\mu h)^2 - \frac{\lambda_1 h^4}{4\Omega^4} \right], \quad (5.14)$$

其中因子 $\sqrt{-g}$ 取 Einstein 系中的度规, $\Omega = 1 + \xi h^2/M_p^2$ 是从 Jordan 系到 Einstein 系的 Weyl 变换因子. 可见, h 的动能项并未归一化. 设归一化的暴胀子为 χ , 它

与 h 的关系由下式确定，

$$\frac{d\chi}{dh} = \frac{\sqrt{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2/M_p^2}}{\Omega^2}. \quad (5.15)$$

为分析暴胀期间的物理，须考虑量子修正。经过量子修正的暴胀势可写作，

$$V(\chi) = \frac{\lambda_1(\mu)h^4(\chi)}{4[1 + \xi(\mu)h^2(\chi)/M_p^2]^2}, \quad (5.16)$$

其中 μ 是重整化尺度。此处我们使用重整化规定 I，取 $\mu = h/\Omega$ 。与标准 Higgs 暴胀相比，新加入的粒子 (S, T) 在此起到关键的作用：它们与 Higgs 场 H 的耦合将修改 λ_1 的跑动，从而可避免 Higgs 势在暴胀期间成为负值。随能量跑动的 $\lambda_1(\mu)$ 可从其重整化群方程中解出。在重粒子 (S, T) 质量阈值 (m_S, m_T) 以下，我们使用标准模型 β 函数计算之，在 (m_S, m_T) 以上，则须考虑新粒子对标准模型 β 函数的修正。在质量阈值处，需要将上下的初值对接起来，即积去 (S, T) 粒子。在经典近似下，这相当于将 (S, T) 从其各自的运动方程中解出，再代入拉格朗日量。由此，可以得到对接条件：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda + \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2}, \quad (\mu = m_S) \\ y_1 &= y_t, \quad (\mu = m_T) \end{aligned} \quad (5.17)$$

其中 λ 是标准模型的 Higgs 自耦合， y_t 是标准模型的顶夸克 Yukawa 耦合。现在，我们列出质量阈值之上的规范耦合 (g_s, g, g') ，标量耦合 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ，以及 Yukawa 耦合 (y_1, y_2, y_3) 的一圈图 β 函数如下，

$$\beta_{g_s} = \beta_{g_s}^{(\text{SM})} + \frac{g_s^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{3}, \quad (5.18a)$$

$$\beta_g = \beta_g^{(\text{SM})}, \quad (5.18b)$$

$$\beta_{g'} = \beta_{g'}^{(\text{SM})} + \frac{g'^3}{(4\pi)^2} \frac{16}{9}, \quad (5.18c)$$

$$\beta_{\lambda_1} = \beta_{\lambda_1}^{(\text{SM})} + \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{2} \lambda_3^2 + 12\lambda_1 y_2^2 - 6y_2^4 - 12y_1^2 y_2^2 \right), \quad (5.18d)$$

$$\beta_{\lambda_2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(18\lambda_2^2 + 12y_3^2 \lambda_2 + 2\lambda_3^2 - 6y_3^4 \right), \quad (5.18e)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_3} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\lambda_3 \left(12\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 + 6y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{9}{2}g^2 - \frac{3}{2}g'^2 \right) - 12y_2^2 y_3^2 \right], \end{aligned} \quad (5.18f)$$

$$\beta_{y_1} = \beta_{y_1}^{(\text{SM})} + \frac{9}{2(4\pi)^2} y_1 y_2^2, \quad (5.18g)$$

$$\beta_{y_2} = \frac{y_2}{(4\pi)^2} \left(\frac{9}{2} y_1^2 + \frac{9}{2} y_2^2 - 8g_s^2 - \frac{9}{4} g^2 - \frac{17}{12} g'^2 \right), \quad (5.18h)$$

$$\beta_{y_3} = \frac{y_3}{(4\pi)^2} \left(y_2^2 + \frac{9}{2} y_3^2 - 8g_s^2 - \frac{8}{3} g'^2 \right), \quad (5.18i)$$

其中 $\beta_i^{(\text{SM})}$ ($i = g_s, g, g', \lambda_1, y_1$) 表示标准模型中已插入 s 因子的 β 函数。在以下计算中，我们取 $\beta_i^{(\text{SM})}$ 的两圈图结果 (4.48)。

现在我们取若干数值样本以计算 $\lambda_1(\mu)$ 。对于 Higgs 质量 m_h 和顶夸克质量 m_t ，取 $m_h = 125.6 \text{ GeV}$, $m_t = 173.3 \text{ GeV}$ ；对于未知参数，即 \mathcal{S} 真空期望值 u 、质量 $(m_{\mathcal{S}}, m_{\mathcal{T}})$ 、混合角 (α, θ) ，以及非最小耦合 ξ ，取四组样本，列于表 5.2。对于 (m_h, m_t) 和 (λ, y_t) 间的关系，已计入一圈图修正 [213]（见 4.4 节），参数 $(m_{\mathcal{S}}, m_{\mathcal{T}}, \alpha, \theta)$ 在 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 质量阈值处经由树图关系输入，非最小耦合 ξ 在 $\mu = M_P/\xi$ 处输入。为简化，我们取在每个样本中取 $m_{\mathcal{S}} = m_{\mathcal{T}}$ ，这不是模型的要求。实际上，只需要 $(u, m_{\mathcal{S}}, m_{\mathcal{T}}) \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$ 即可。

表 5.2 包含 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 的 Higgs 暴胀模型的参数样本

样本	u	$m_{\mathcal{S}}$	$m_{\mathcal{T}}$	α	θ	ξ
A	7 TeV	3.08 TeV	3.08 TeV	1.8×10^{-2}	1.33682×10^{-2}	7.53025
B	4 TeV	1.34 TeV	1.34 TeV	4.0×10^{-2}	3.00017×10^{-2}	10.456
C	4 TeV	1.288 TeV	1.288 TeV	4.0×10^{-2}	2.9898×10^{-2}	20.85
D	4 TeV	1.6 TeV	1.6 TeV	3×10^{-2}	2×10^{-2}	2670

在表 5.2 的四组样本中，非最小耦合 ξ 从小到大递增。样本 A、B 和 C 对应于 Higgs 暴胀参数空间的“临界区域” [215, 216, 220]，即 $\xi \sim \mathcal{O}(1 \sim 10)$ ，而 λ_1 非常接近 0（参见 4.4 节）。与此参数区域相应的暴胀势对初值输入极为敏感，因此需要参数微调，如表 5.2 中 A、B、C 三组数据所示。易见，参数微调的程度随 ξ 的增大而下降。与此相对，样本 D 对应于大 ξ 区域，因此对初值输入并不敏感。

由重整化群方程和初值输入，可解出各耦合常数随能量的跑动行为。我们在图 5.1 中展示样本 A 和样本 D 两种参数选取所给出的标量耦合常数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 。由图可见，四组样本在 Planck 尺度以下皆满足良好的微扰性，且 λ_1 皆正定。其中，样本 A,B,C 对应于临界参数空间，因而 λ_1 在 $\sim 10^{16} \text{ GeV}$ 处十分接近于零， $\lambda_1 \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ 。这是通过对参数的微调而实现的。与之相反，样本 D 对应于大 ξ 区域，因而 $\lambda_1 \sim 10^{-3}$ 在暴胀尺度并不很小。

在图 5.2 中，我们列出表 5.2 中四组样本所对应的暴胀势在暴胀子方向的投影。其中，样本 A,B,C 的暴胀势在 $h = 0.2 \sim 0.4 M_P$ 时有明显的平台。此平台的出现，是暴胀势 $V = \frac{1}{4} \lambda_1(\mu) \Omega^{-4} h^4$ 中 λ_1 的下降与 h 的上升间竞争的结果。当 $h \gtrsim 0.4 M_P$ 时，

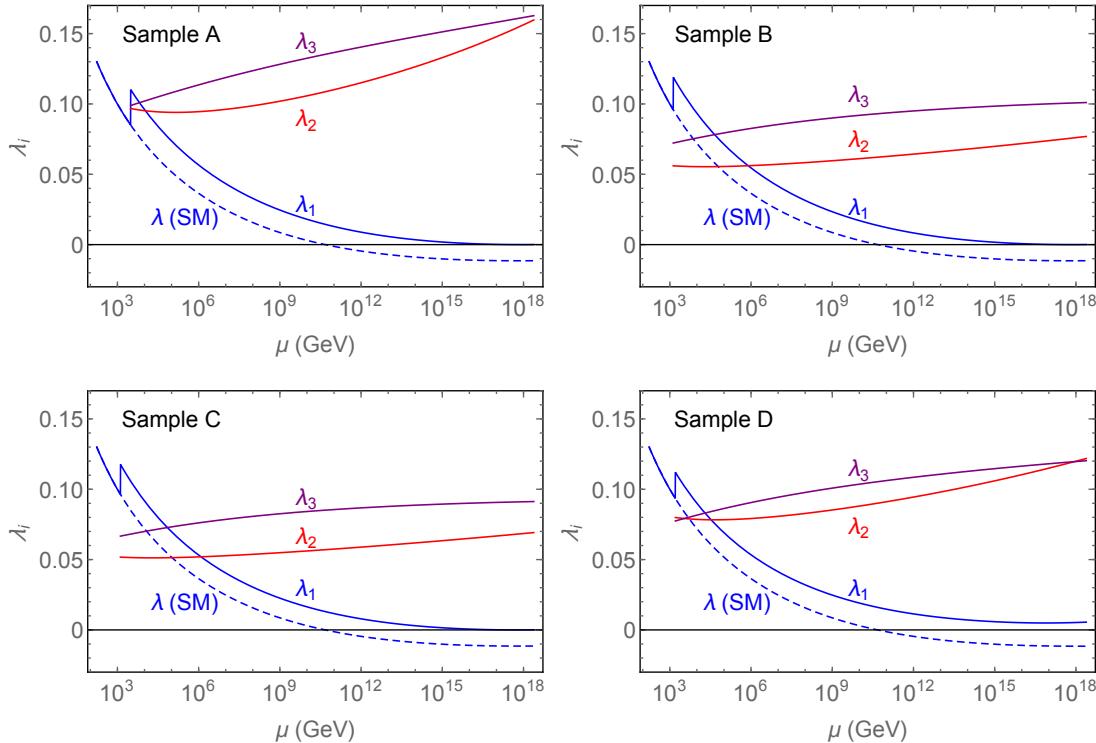


图 5.1 标量耦合常数 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) 作为重整化尺度 μ 的函数. 样本的初值取自表 5.2. 虚线所对应的 $\lambda(\text{SM})$ 为标准模型 Higgs 自耦合常数.

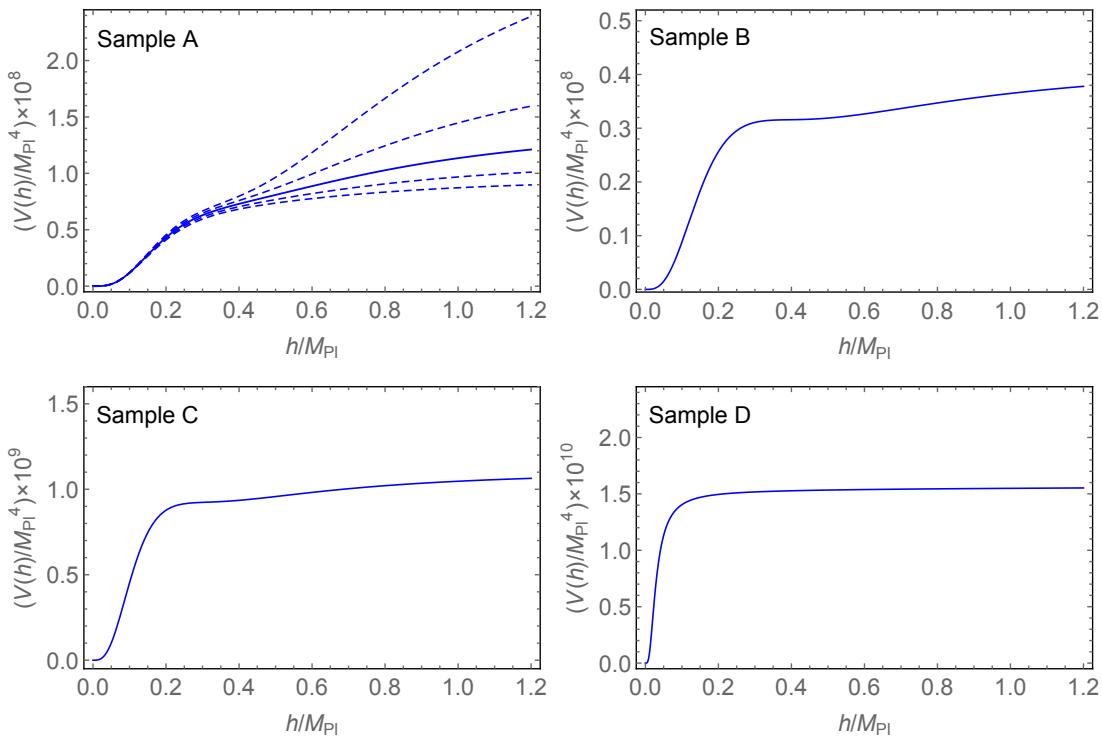


图 5.2 暴胀势 $V(h)$ 作为暴胀子 h 的函数. 样本的初值取自表 5.2. 其中, 样本 A 中自下而上的 5 条曲线, 分别对应于非最小耦合 ξ 偏离样本 A 取值 $\Delta\xi = 2, 1, 0, -1, -2$ 的结果.

$V(h)$ 随即恢复上升，是因为此时 λ_1 已停止下降，而这又是因为 $\lambda_1(\mu)$ 中 $\mu = h/\Omega$ 在 $h \gtrsim 0.4M_P$ 时趋于常值。最后，在 $h \gtrsim M_P$ 时，暴胀势又一次趋于平坦，则是非最小耦合 ξ 所产生的 Ω 因子压低的后果。观察此图，便不难理解 Higgs 暴胀的临界参数区域为何能导致 $\mathcal{O}(0.1)$ 的张标比：首先，在 $h \simeq 0.4M_P$ 处非常平坦的平台处， $\epsilon \simeq 0$ ，从而暴胀 e 重数 N_e 的表达式 (4.7) 中，被积函数 $\propto \epsilon^{-1/2} \simeq 10^2 \sim 10^3$ ，这意味着 h 只需在场空间滚过很短的距离，即可达到所需的暴胀 e 重数 $N_e = 50 \sim 60$ 。于是，如若在暴胀的开端， h 正好位于暴胀势重新上升的区域 $h \sim 0.8M_P$ ，亦即 ϵ 相当大的区域，则由此产生的张标比 $r = 16\epsilon$ 就可能很大（参见下一小节讨论）。与此同时，也容易理解为何在图 5.2 的样本 D 中，张标比 $r \sim 10^{-3}$ 不可能很大：这是因为 ξ 很大时，暴胀势很快趋于平坦，有如 4.2 节所述的标准 Higgs 暴胀，其暴胀势具有指数平坦的行为，因而 ϵ 在暴胀期间始终很小，从而张标比亦小。

另外，我们在图 5.2 的样本 A 中，加入了改变非最小耦合 ξ 后所得的标量势，对应于蓝色虚线。由此可见，愈大的 ξ 在 $h \sim M_P$ 时导致愈平坦的标量势。同时，也能看出，在临界参数区域，暴胀势对非最小耦合选取的极度敏感。事实上，样本 A 图中的虚线所对应的标量势皆不能产生成功的暴胀。

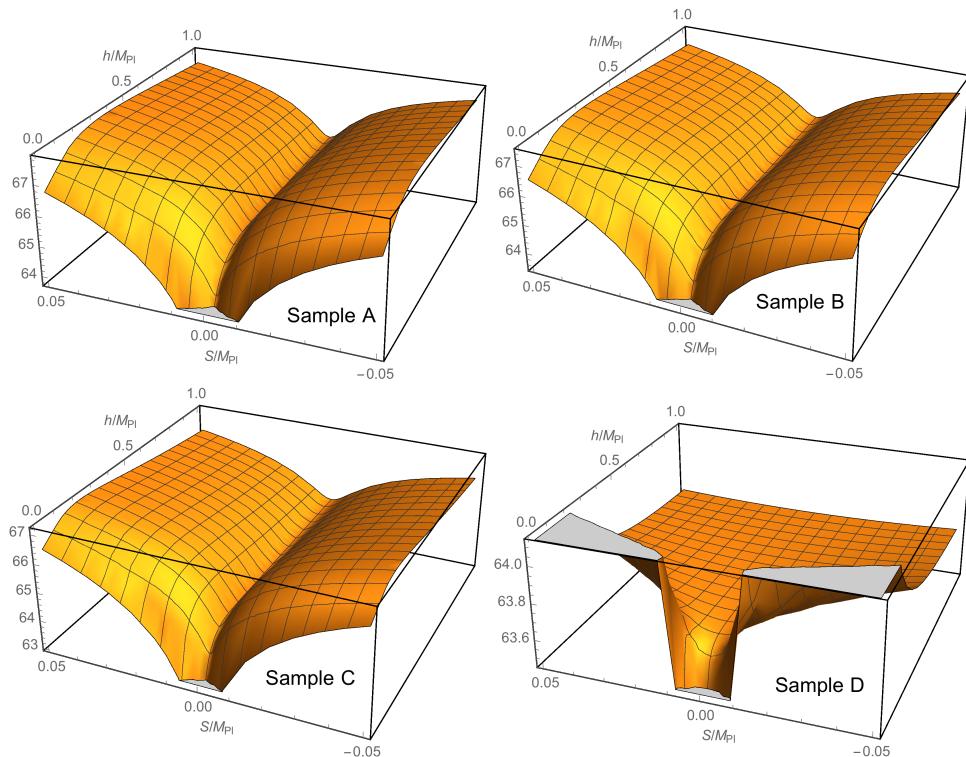


图 5.3 标量势 $V(h, S)$ 作为 h 和 S 的函数。样本的初值取自表 5.2。纵轴对应于 $\log_{10}(V/\text{GeV}^4)$ 。

在图 5.3 中，我们恢复标量势 $V(h, \mathcal{S})$ 对 \mathcal{S} 的依赖，即，

$$V(h, \mathcal{S}) = \frac{1}{4\Omega^4} (\lambda_1 h^4 + \lambda_2 \mathcal{S}^2 + \lambda_3 h^2 \mathcal{S}^2). \quad (5.19)$$

由上式可见，暴胀轨道 $\mathcal{S} = 0$ 总是 \mathcal{S} 方向的局部极小值，这由图 5.3 亦能看出。因此，在关于暴胀的分析中取 $\mathcal{S} = 0$ 是合理的。

表 5.3 可观测暴胀初始时刻的 Higgs 场值 h_0 与暴胀可观测量 (n_s, r)

样本	h_0/M_P	n_s	r
A	0.866	0.968	0.187
B	0.819	0.968	0.092
C	0.731	0.966	0.032
D	0.178	0.967	0.004

最后，我们依标准的单场慢滚暴胀公式 (4.29) 计算该模型所预言的暴胀可观测量，即（标量）谱指数 n_s 与张标比 r 。依 [181, 182] 取暴胀的 e 重数 N_e 为 59，可以计算出在可观测暴胀起始时 Higgs 场的值 h_0 ，以及谱指数 n_s 和张标比 r ，如表 5.3 所示。

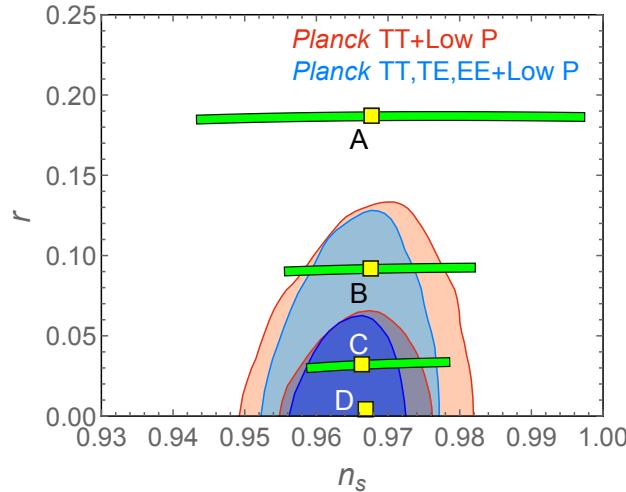


图 5.4 包含 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 的 Higgs 暴胀模型所预言的标量谱指数 n_s 与张标比 r 。黄色方形数据点自上而下对应于表 5.3 中样本 (A,B,C,D) 的结果，而 A,B,C 点左右的绿色曲线对应于表 5.2 中相应样本的非最小耦合 ξ 附近作变动 $\Delta\xi = (\pm 0.00035, \pm 0.002, \pm 0.03)$ 的结果。蓝色和红色阴影所代表的观测限制取自 [172]。

在图 5.4 中，我们将表 5.3 结果与 Planck 对 CMB 的测量、以及其他宇宙学测量所得到的观测限制 [172] 相对照。其中，四个黄色的方形数据点自上而下对应于

表 5.3 中的样本 A、B、C、D。而 A、B、C 点左右的绿色带状曲线则对应于将每个样本中的非最小耦合 ξ 在表 5.2 所示值附近作小范围变动的效果。相应的变动范围对样本 A、B、C 分别为 $\Delta\xi = (\pm 0.00035, \pm 0.002, \pm 0.03)$ 。显见，样本 A、B、C 所预言的标量谱指数 n_s 敏感地依赖于非最小耦合 ξ ，且敏感程度随着 ξ 的增大而减小。

5.1.3 讨论与小结

以上介绍了 TeV 尺度的新粒子对标准 Higgs 暴胀的影响。这影响在暴胀期间有两个方面：一是改善了 Higgs 真空的稳定性问题，即解决了标准模型中 Higgs 势在暴胀期间取负值的问题；二是额外创造出可用的临界参数空间，在此区域中，Higgs 自耦合在暴胀期间非常小， $\lambda \sim \mathcal{O}(10^{16})$ ，从而非最小耦合 $\xi \sim \mathcal{O}(10)$ 也很小，由此导致张标比 r 可大至 $\mathcal{O}(0.1)$ 。同时，此时的暴胀观测量对理论的参数极为敏感，如表 5.2 中的混合角 θ 和非最小耦合 ξ ，亦可参见图 5.4 中的绿色曲线。

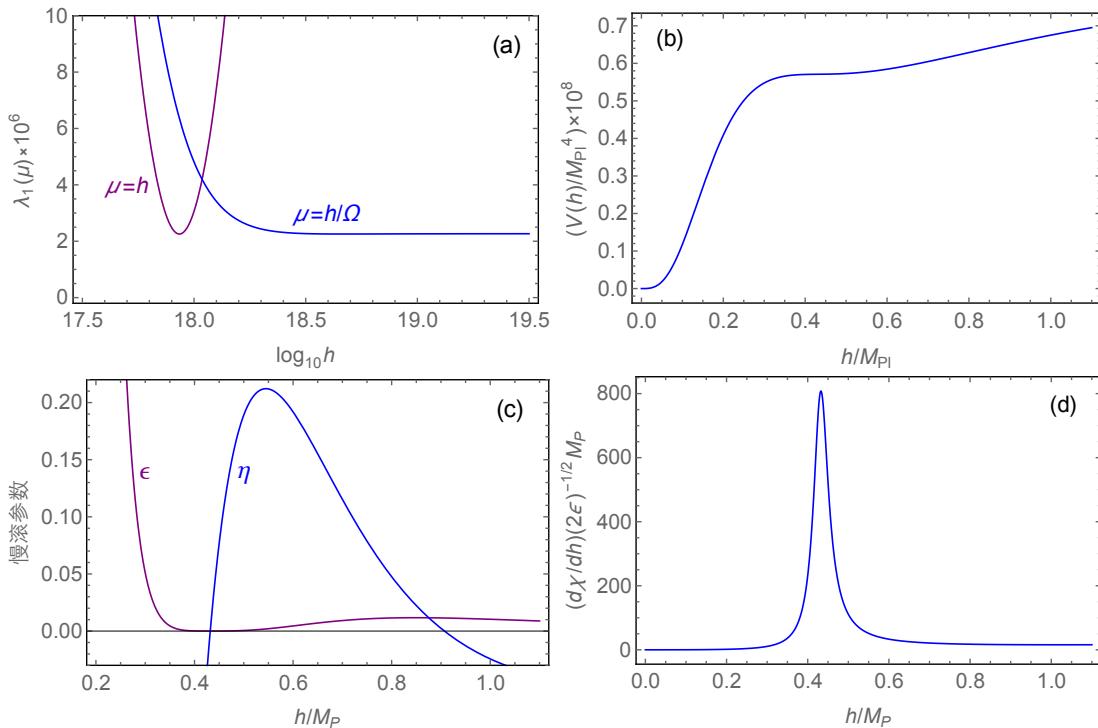


图 5.5 表 5.2 样本 A 中各参数在暴胀期间作为暴胀子 h 的函数。(a) Higgs 自耦合 $\lambda_1(\mu)$ 作为 h 的函数，其中蓝色曲线代表按规定 I 选取的重整化尺度 $\mu = h/\Omega$ ，紫色曲线代表规定 II 的选取 $\mu = h$ ；(b) 暴胀势 $V(h)$ 作为 h 的函数；(c) 慢滚参数 ϵ, η 作为 h 的函数；(d) 暴胀 e 重数表达式 (4.7) 中的被积函数 $(d\chi/dh)/\sqrt{2\epsilon}$ 作为 h 的函数。

由于临界参数空间与标准 Higgs 暴胀的大 ξ 区域有定性的差别，这里以表 5.2 的样本 A 为例，详细讨论之。图 5.5 中列出了样本 A 中 Higgs 自耦合 λ_1 、暴

胀势、慢滚参数，以及 e 重数 N_e 表达式 (4.7) 的被积函数在暴胀期间随 h 的变化行为。由图 5.5(a) 可见，Higgs 自耦合 λ_1 在 $\mu \simeq 10^{18} \text{GeV}$ 处达到极小值（对应于 β 函数的零点）。根据选取重整化尺度的规定 I（见 4.4 节）， $\mu = h/\Omega$ ，这里 $\Omega^2 = 1 + \xi h^2/M_p^2$ 是 Weyl 变换因子，因而 μ 作为 h 的函数在 $h \gtrsim M_p/\sqrt{\xi} \sim 10^{18}$ 后趋于常数 $\mu = M_p/\sqrt{\xi}$ 。这意味着 λ_1 作为 h 的函数在 $h > M_p/\sqrt{\xi}$ 亦停止跑动，而稳定在 $\lambda_1 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 处。这在图 5.5(b) 中造成了 $h = 0.4M_p \sim 0.6M_p$ 处的一段极为平坦的区域。这段平坦的区域同时体现在图 5.5(c) 中 ϵ 在 $h = 0.4M_p \sim 0.6M_p$ 极小、以及图 5.5(d) 中的函数在 $h \simeq 0.45M_p$ 处的尖峰。此尖峰意味着 h 只需滚过相当短的距离就可实现所需的 $N_e = 50 \sim 60$ ，从而在暴胀起始时 $h \simeq 0.866M_p$ ，且此值敏感地依赖于尖峰的高度和宽度，因而敏感地依赖于表 5.2 中的参数输入。

与此相应，由于图 5.5(b) 中暴胀势在暴胀起始处 ($h = 0.866M_p$) 重新上升，慢滚参数 ϵ 取值亦增大至 $\mathcal{O}(0.01)$ ，于是这给出 $r = 16\epsilon \sim \mathcal{O}(0.1)$ 。同时，由 5.5(c) 可见，在暴胀起始处，慢滚参数 η 随 h 迅速变化，加之 h 的起始值对输入参数极敏感，因而可以理解，谱指数 $n_s = 1 - 6\eta + 2\epsilon$ 为何会敏感地依赖于输入参数。

需要注意的是，由于理论所预言的观测量对初值输入极为敏感，同时考虑进理论计算的不确定度（如 2 圈图近似）和输入值的不确定度（如 Higgs 质量、顶夸克质量、强作用耦合常数的不确定度），因而表 5.2 中经过微调的参数只有示意的性质，而不是确切的取值。

最后，除了加入一对玻色子和费米子之外，文献中亦有其他类似的模型，如，考虑在标准模型中加入新的标量场 [228]、标量暗物质粒子 [220, 229]、标量暗物质粒子与右手中微子 [230, 231]，以及标量胀子（dilaton）[232]。这些新粒子所出现的尺度各不相同，在本节所讨论的模型中，TeV 尺度的新粒子（特别是矢量型夸克）是可以为 LHC 以及未来对撞机所搜寻和检验的，因而同时也具有粒子现象学的重要性。

5.2 超引力中的 Higgs 暴胀^①

在上一节中，我们讨论了新物理的一种简化的现象学模型，即在 TeV 尺度加入一对重的玻色子和费米子。本节，我们将考虑更完整的新物理模型，即超对称理论。

^① 本节取 $M_p = 1$ 。

5.2.1 概述

标准 Higgs 暴胀的关键，是引入了 Higgs 场与引力的非最小耦合项 $\mathcal{R}H^\dagger H$. 因此，将标准 Higgs 暴胀推广到超对称理论时所遇到的第一个问题，就是如何在超引力理论中自洽地加入 $\mathcal{R}H^\dagger H$ 项. 在传统的超引力理论中^[38]，物质场与引力场之间皆为最小耦合，因此如何将非最小耦合项超对称化，并非显而易见. 2010 年之后，Ferrara 等人^[233,234]发展了一套在超引力中写下非最小耦合的方法，并将其应用于 Higgs 暴胀的研究. 简言之，在超引力中写下非最小耦合项，相当于写出 Jordan 系中的作用量. 原则上，这可通过对 Einstein 系的作用量作适当的 Weyl 变换而得. 然而将这种做法应用于超引力的作用量会十分繁冗. 避免这冗长计算的一种窍门是从局域化的超共形理论^[235]出发，将其作用量的共形对称性通过规范固定的方式消去，所得结果即为 Jordan 系的超引力理论. 关于超共形理论以及这种规范固定方法的详细介绍，可见^[34].

超对称一方面为理论引入了更多标量场. 例如在 MSSM 中，除了所有费米子都获得相应的标量粒子作为超对称伴子，还需要两倍于标准模型的 Higgs 场自由度，以满足超势的全纯性和消除规范反常. 另一方面，超对称也对理论的结构加入了更强的限制. 例如在 MSSM 中，若只考虑满足超对称部分，那么 Higgs 场的自作用就完全由规范耦合常数决定. 因此，在超对称中实现 Higgs 暴胀，一方面要留意暴胀轨道在扩大了的标量场空间中的稳定性问题，另一方面也要尽量在被高度限制的标量势结构中找出适合驱动暴胀的方向.

较早的研究发现，在 MSSM 中不易实现 Higgs 暴胀. 因此人们很快将目光转向 NMSSM^[236]. 但是在 NMSSM 的一种简单模型中^[236]，Higgs 暴胀的轨道在额外的单态标量方向上不稳定^[233]. 解决此问题的一种可能方式是在 Kähler 势中加入高阶项^[234]，但这是相当刻意的做法. 另一方面，也有文献考虑在超对称的大统一理论中实现 Higgs 暴胀^[237,238]. 同样，其中也需要含有高阶项从而相当任意的 Kähler 势.

在大统一理论中构造暴胀模型有特别的理由，即暴胀发生时宇宙的能量密度（亦即标量势的大小）与大统一尺度量级相同. 注意到，超对称理论中规范耦合常数的统一发生于 $2 \times 10^{16}\text{GeV}$ 左右；另一方面，暴胀的标量扰动的幅度固定了 $(V/\epsilon)^{1/4} \simeq 0.027 M_p$. 因此，暴胀势的大小为 $V^{1/4} \simeq \epsilon^{1/4} \times (6 \times 10^{16})\text{GeV}$. 一般而言， $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-3} \sim 10^{-1})$ ，因此即使考虑进 ϵ 的这种不确定性，也可知道 $V \sim (10^{16}\text{GeV})^4$. 因此，即使大统一的发生与暴胀过程无直接的关联，大统一理论的物理对暴胀有所影响，也是情理之中.

在大统一理论中构造暴胀模型的历史比 Higgs 暴胀长得多，这里并不打算全

面回顾相关文献，而仅列举与本文有关的最近的研究。在 BICEP2 结果 [218] 之后，暴胀尺度与大统一尺度的关系引起了特别的关注。[239] 在一类简化的模型中讨论了由 GUT 真空能驱动的暴胀，此类机制在具体 GUT 理论中的实现，可见 [240]。关于 GUT Higgs 暴胀的尝试，可见 [241, 242]。

本节将详细研究超对称大统一理论中的 Higgs 暴胀。由于暴胀过程相当接近于 Planck 尺度，且在大场暴胀模型中，暴胀子的值一般会超过 Planck 尺度，因此须考虑超引力的效应。本节所研究的暴胀模型都建立在无标 (no-scale) 超引力的框架下。对于无标超引力的结构，我们已在 2.4 节简要讨论过，这里不再赘述，而仅是指出最近与暴胀物理学相关的研究。在 2013 年 Planck 结果 [243] 公布后，[244, 245] 注意到，将 Wess-Zumino 超势 [246] 纳入无标超引力的框架中，可自然地得到 Starobinsky 类型的暴胀模型，其中的暴胀子可进一步取为右手标中微子 (right-handed sneutrino) [247]。由于无标超引力自身的结构，此类模型所预言的张标比 $r \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ 与 Starobinsky 相同，因而，在 BICEP2 结果 [218, 219] 之后，显然的问题是是否能在无标超引力中获得较大的张标比。一般的推广都需要相当复杂的超势或明显偏离无标超引力的 Kähler 势 [248–250]。关于无标超引力暴胀最近的讨论，可见 [251]。

另外，在超引力中实现暴胀还有一些特别的困难。其中之一是所谓 η 问题。从 2.4 节超引力标量势 (2.39) 可见，其中一般含有因子 $e^{\mathcal{K}}$ ，这一般会造成指数型陡峭的势能曲线，因而无法满足慢滚条件。克服此困难的一般方法是引入场空间中近似的平移对称性 (shift symmetry) [252]，即 $\phi \rightarrow \phi + a$ 。当然，此类对称性还有可能被引力的量子效应所破坏，因而还需假设紫外的量子引力理论可保持该对称性。另外，超引力暴胀的重加热过程中引力微子的产生率对其质量亦有限制。此类讨论可见 [253]，与本文模型相关的讨论，可见 [234] 与 [247]。

5.2.2 无标 $SU(5)$ 大统一理论

首先考虑最简单的大统一群，即 $SU(5)$ 群 [254]。在这理论中，MSSM 的一对双态 Higgs 场 H_u, H_d 分别被嵌入到 $SU(5)$ 的 **5** 和 **5̄** 表示中，分别记作 H 和 \bar{H} ，

$$H = \begin{pmatrix} H_c \\ H_u \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} \bar{H}_c \\ \bar{H}_d \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

其中 (H_c, \bar{H}_c) 是带色的 Higgs 场，分别属于色 $SU(3)$ 的 **3** 和 **3̄** 表示， $(\tilde{H}_d)^i = \epsilon^{ij} H_{di}$ 。在 $SU(5)$ 破缺之后， (H_c, \bar{H}_c) 应获得很大的质量，而 (H_u, H_d) 的质量应在 TeV 尺度。这里的 $SU(5)$ 对称性破缺由另一个伴随表示（即 **24** 表示）的 Higgs 场 Σ 完

成。 Σ 可被表为 5×5 的零迹矩阵，当大统一破缺后，它获得真空期望值，

$$\langle \Sigma \rangle = \sqrt{\frac{2}{15}} \langle S \rangle \text{diag} \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right), \quad (5.21)$$

其中， S 是手征超多重态且为 $SU(5)$ 下的单态。

为实现上述大统一破缺的模式，在目前的模型中，我们引入一离散对称性 \mathbb{Z}_2 ，使 Σ 在其变换下反号。从而，直到量纲为 4 的水平，由 Σ 和 (H, \bar{H}) 构成的最一般的超势 W 有如下形式，

$$W = W_\Sigma + W_H, \quad (5.22)$$

其中，

$$W_\Sigma = -\frac{1}{2}m \text{tr}(\Sigma^2) + \frac{1}{4}\tilde{\lambda} \text{tr}(\Sigma^4), \quad (5.23a)$$

$$W_H = \mu H \bar{H} - \tilde{\beta}_1 H \Sigma^2 \bar{H} - \beta_2 (H \bar{H})^2. \quad (5.23b)$$

在低能下， $(H, \bar{H}) = 0$ ，因此 W_H 为 0 而 W_Σ 主导。将 Σ 的真空值 (5.21) 带入超势中，可得，

$$W_\Sigma = -\frac{1}{2}mS^2 + \frac{7}{120}\tilde{\lambda}S^4. \quad (5.24)$$

极小值条件 $\partial W / \partial S = 0$ 给出 $\langle S \rangle \equiv u = \sqrt{m/\lambda}$ ，其中 $\lambda \equiv \frac{7}{30}\tilde{\lambda}$ 。这里， S 的期望值 $u = \langle S \rangle$ 由超对称规范耦合的统一定为 $u \simeq 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$ 。现在，再用 (5.20) 和 (5.21) 将 W_H 表出，可得，

$$W_H = H_c \left(\mu - \frac{4}{9}\beta_1 S^2 \right) \bar{H}_c + H_u \left(\mu - \beta_1 S^2 \right) \bar{H}_d - \beta_2 (H_c \bar{H}_c + H_u \bar{H}_d)^2, \quad (5.25)$$

其中 $\beta_1 \equiv \frac{3}{10}\tilde{\beta}_1$ 。如前所述， (H_c, \bar{H}_c) 应很重，而 (H_u, H_d) 的质量应取在 TeV 尺度，即远小于 u 。因此，这里应取 $\mu = \beta_1 u^2$ ，从而 (H_c, \bar{H}_c) 得到质量 $M_c = \frac{5}{9}\beta_1 u^2$ 。

以上介绍了此模型的超势，它包含直到量纲为 4 的所有算子。另一方面，Kähler 势的形式则由无标超引力的结构确定为，

$$\mathcal{K} = -3 \log \Xi, \quad (5.26)$$

其中，

$$\Xi \equiv T + T^* - \frac{1}{3} \text{tr}(\Sigma^\dagger \Sigma) - \frac{1}{3} \left(|H|^2 + |\bar{H}|^2 + \xi (H \bar{H} + \text{h.c.}) \right), \quad (5.27)$$

这里 T 是模场（见 2.4 节）。我们假设紫外的物理已将 T 稳定在 $\langle T \rangle = \langle T^* \rangle = 1/2$ 。关于在超引力中稳定 T 的机制，可见 [245]。标准的无标超引力 Kähler 势不包含 ξ 项，此项是从现象学考虑而加入的对无标超引力的简单的变形，我们取 $\xi \in [0, 1]$ 。

为写出 Kähler 度规的分量表达式，我们将 GUT Higgs 场 Σ 按 5 阶零迹 Hermite 方阵的 24 个基 λ^α 展开为 $\Sigma_{ij} = \sum_\alpha \Sigma^\alpha \lambda_{ij}^\alpha$. 于是可写出 Kähler 度规的分量如下，

$$\mathcal{K}_{TT^*} = 3\Xi^{-2}, \quad (5.28a)$$

$$\mathcal{K}_{T\Sigma^{*\alpha}} = -\Xi^{-2}\Sigma^\alpha, \quad (5.28b)$$

$$\mathcal{K}_{TH_i^*} = -\Xi^{-2}(H_i + \zeta\bar{H}_i^*), \quad (5.28c)$$

$$\mathcal{K}_{T\bar{H}_i^*} = -\Xi^{-2}(\bar{H}_i + \zeta H_i^*), \quad (5.28d)$$

$$\mathcal{K}_{\Sigma^\alpha \Sigma^{*\beta}} = \Xi^{-2}(\Xi\delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Sigma^{*\alpha}\Sigma^\beta), \quad (5.28e)$$

$$\mathcal{K}_{\Sigma^\alpha H_i^*} = \frac{1}{3}\Xi^{-2}(H_i + \zeta\bar{H}_i^*)\Sigma^{*\alpha}, \quad (5.28f)$$

$$\mathcal{K}_{\Sigma^\alpha \bar{H}_i^*} = \frac{1}{3}\Xi^{-2}(\bar{H}_i + \zeta H_i^*)\Sigma^{*\alpha}, \quad (5.28g)$$

$$\mathcal{K}_{H_i H_j^*} = \Xi^{-2}[\Xi\delta_{ij} + \frac{1}{3}(H_i^* + \zeta\bar{H}_i)(H_j^* + \zeta\bar{H}_j)], \quad (5.28h)$$

$$\mathcal{K}_{H_i \bar{H}_j^*} = \frac{1}{3}\Xi^{-2}(H_i^* + \zeta\bar{H}_i)(\bar{H}_j + \zeta H_j^*), \quad (5.28i)$$

$$\mathcal{K}_{\bar{H}_i \bar{H}_j^*} = \Xi^{-2}[\Xi\delta_{ij} + \frac{1}{3}(\bar{H}_i^* + \zeta H_i)(\bar{H}_j^* + \zeta H_j)], \quad (5.28j)$$

其中 $i, j, k, \ell = 1, \dots, 5$. 当 Σ 被表为 (5.21) 的形式后，相应的 Kähler 度规的分量为，

$$\mathcal{K}_{TS^*} = -\Xi^{-2}S, \quad (5.29a)$$

$$\mathcal{K}_{SS^*} = \Xi^{-2}[(\Xi + \frac{1}{3}|S|^2)], \quad (5.29b)$$

$$\mathcal{K}_{H_k S^*} = \frac{1}{3}\Xi^{-2}(H_k^* + \zeta\bar{H}_k)S, \quad (5.29c)$$

$$\mathcal{K}_{\bar{H}_k S^*} = \frac{1}{3}\Xi^{-2}(\bar{H}_k^* + \zeta H_k)S. \quad (5.29d)$$

在计算标量势时，还需要 Kähler 度规的逆 \mathcal{K}^{IJ} ，其非零的分量为，

$$\mathcal{K}^{TT^*} = \frac{1}{3}\Xi[T + T^* + \frac{1}{3}\zeta(H\bar{H} + \text{h.c.}) + \frac{1}{3}\zeta^2(|H|^2 + |\bar{H}|^2)], \quad (5.30a)$$

$$\mathcal{K}^{TS^*} = \frac{1}{3}\Xi S, \quad (5.30b)$$

$$\mathcal{K}^{TH_i^*} = \frac{1}{3}\Xi(H_i + \zeta\bar{H}_i^*), \quad (5.30c)$$

$$\mathcal{K}^{T\bar{H}_i^*} = \frac{1}{3}\Xi(\bar{H}_i + \zeta H_i^*), \quad (5.30d)$$

$$\mathcal{K}^{SS^*} = \Xi, \quad (5.30e)$$

$$\mathcal{K}^{H_i H_j^*} = \Xi\delta_{ij}, \quad (5.30f)$$

$$\mathcal{K}^{\bar{H}_i \bar{H}_j^*} = \Xi\delta_{ij}, \quad (5.30g)$$

除了与以上分量共轭的分量，即 $\mathcal{K}^{\Phi_I^* \Phi_J} = (\mathcal{K}^{\Phi_J \Phi_I^*})^*$ 之外，其余分量皆为零。

由 Kähler 势 (5.26) 与超势 (5.22)，可求得标量势 (2.39). 包含 Σ, H, \bar{H} 中所有分量的标量势的表达式很复杂. 但在暴胀期间，只有暴胀子的方向有很大的背景值，其余分量皆为零. 因此暴胀势可获得很大简化. 现在， (H_u, H_d) 可被表出为，

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_d = \begin{pmatrix} H_d^- \\ -H_d^0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

我们将 (H_u, H_d) 中的中性分量重新参数化为，

$$H_u^0 = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)e^{i\theta}, \quad H_d^0 = \frac{1}{2}(H_1 - H_2)e^{i\varphi}. \quad (5.32)$$

标量势的 D 项平坦条件要求 $H_2 = 0$. 我们也将暂时取 GUT Higgs 场 S 、色 Higgs 场 (H_c, \bar{H}_c) 、带电的 Higgs 场 (H_u^+, H_d^-) ，以及 $\theta = \varphi = 0$ (其正确性将在下文讨论)，从而标量势只是 $H_1 = |H_u^0| + |H_d^0|$ 的函数，且具有如下简单形式，

$$V(H_1) = \frac{\beta_1^2 u^4 \left(1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1 u^2} H_1^2\right)^2 H_1^2}{2\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^2}. \quad (5.33)$$

此标量势在 $H_1^2 = 6/(1-\zeta)$ 处发散. 此类奇点在无标超引力中相当常见. 当用正则归一化的标量场重新表达标量势时，此类起点通常导致指数形陡峭的势函数，因而无法满足慢滚条件. 为避免这样奇点的出现，我们为模型的参数加入条件，

$$\beta_2 = \frac{1}{3}\beta_1(1-\zeta)u^2. \quad (5.34)$$

于是，标量势 $V(H_1)$ 进一步简化为，

$$V(H_1) = \frac{1}{2}\beta_1^2 u^4 H_1^2. \quad (5.35)$$

但这并不说明此模型一定导致平方的暴胀势，因为 H_1 尚未被归一化. 为看出这一点，我们写出 H_1 的动能项，

$$\mathcal{L}_K(H_1) = \frac{1 - \frac{\zeta(1-\zeta)}{6} H_1^2}{2\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^2} (\partial_\mu H_1)^2. \quad (5.36)$$

于是，若将 H_1 正则归一化为 h ，有，

$$h = \sqrt{6} \operatorname{arctanh} \frac{(1-\zeta)H_1}{\sqrt{6\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)}} - \sqrt{\frac{6\zeta}{1-\zeta}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\zeta(1-\zeta)}{6}} H_1 \right). \quad (5.37)$$

当 $\zeta = 0$ 和 1 时，可从上式解析地反解出 H_1 ，并得到暴胀势 $V(h)$ 的解析表达式. 首先，当 $\zeta = 0$ 时， $H_1(h) = \sqrt{6} \tanh(h/\sqrt{6})$ ，于是，

$$V(h) = 3\beta_1^2 u^4 \tanh^2 \frac{h}{\sqrt{6}}. \quad (5.38)$$

当 h 很大时，此暴胀势具有指数平坦的形状，即与标准 Higgs 暴胀的形式相似。容易看出，它对暴胀观测量 (n_s, r) 的预言与标准 Higgs 暴胀亦相同，在取 $N_e = 50$ 和 60 时分别对应于图 5.6(a) 中绿色和黄色的圆点。

其次，当 $\zeta = 1$ 时， H_1 本身已正则归一化，即有 $H_1 = h$ ，从而，

$$V(h) = \frac{1}{2} \beta_1^2 u^4 h^2. \quad (5.39)$$

此即平方混沌暴胀（quadratic chaotic inflation），其预言的 (n_s, r) 在取 $N_e = 50$ 和 60 时分别对应于图 5.6(a) 中绿色和黄色的正方形点。由此可见，在 $\zeta = 0$ 和 1 的两种极限下，此模型可以自然地导致 $r \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ 和 $r \sim \mathcal{O}(0.1)$ 两种预言。

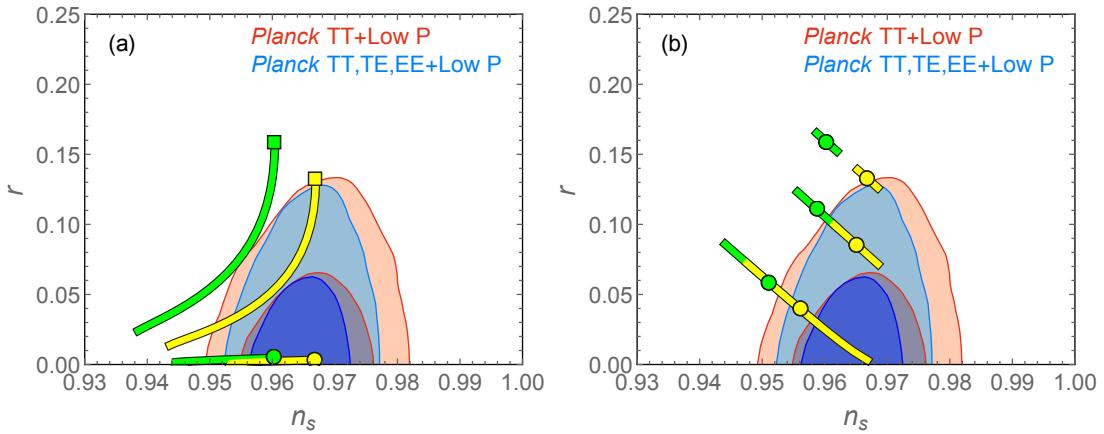


图 5.6 无标 $SU(5)$ 大统一理论的 Higgs 暴胀所预言的标量谱指数 n_s 与张标比 r 。绿色（黄色）数据点和曲线代表取 $N_e = 50$ （60）的结果。（a）对应于引入条件 (5.34) 的结果，其中方形（圆形）数据点代表 $\zeta = 1$ （0）的预言值，方形以下（圆形左侧）的曲线代表从 $\zeta = 1$ 向下移动到 $\zeta = 0.9$ （从 $\zeta = 0$ 向上移动到 $\zeta = 0.1$ ）的结果。（b）中，自上而下的三组圆形点对应于 $\zeta = (1, 0.98, 0.95)$ 且满足条件 (5.34) 的结果，而每个原点两侧的曲线段对应于取 (5.40) 中 δ 在 $\pm 1.2 \times 10^{-3}$ 之间变动的结果。两图中，蓝色和红色阴影所代表的观测限制取自 [172]。

当 ζ 在 0 和 1 之间变动时，我们可得到一类介于标准 Higgs 暴胀和平方混沌暴胀之间的模型。在图 5.6(a) 中，我们从 $\zeta = 0$ 开始增加 ζ ，其对应的 (n_s, r) 从圆形点出发向左（ n_s 减小的方向）移动；同时，从 $\zeta = 1$ 开始减小 ζ ，其预言的 r 则从 $\mathcal{O}(0.1)$ 开始迅速减小。因而，该模型所预言的张标比可从 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 连续变动到 $\mathcal{O}(0.1)$ 。

另外，也可以考察关系式 (5.34) 被轻微破坏的后果。为此，我们将条件 (5.34) 修改为，

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \beta_1 (1 - \zeta + \delta) u^2, \quad (5.40)$$

其中 δ 为小量。利用 (5.33)，可得出此时的标量势、相应的慢滚参数，及其所预言的 (n_s, r) 。我们将后者置于图 5.6(b)，其中，我们在满足 (5.34) 式的三个数据点（即 $\delta = 0$ ）附近，使 δ 在 $\pm 1.2 \times 10^{-3}$ 范围内变动，可见其对应的 (n_s, r) 皆有明显的变化。

最后，由观测而知的标量扰动的振幅^[171] $(V/\epsilon)^{1/4} \simeq 0.0267 M_P$ ，可求出此模型暴胀势的系数 $\beta_1 u^2$ 。再由 $u \simeq 0.01 M_P$ ，可定出 $\beta_1 \simeq 0.06$ 。此值在 $\zeta \in [0, 1]$ 变动时改变很小。由此，可以得出带色 Higgs 场 (H_c, \bar{H}_c) 的质量约为 $M_c \simeq 0.8 \times 10^{13} \text{ GeV}$ 。在最小 $SU(5)$ 模型中，质子稳定性的限制和规范耦合的统一意味着带色的 Higgs 场须远重于 10^{13} GeV ^[57, 255]。然而，关于质子稳定性的讨论通常依赖于轻费米子质量产生机制与质量混合的模型，因而并不是绝对的限制。而关于规范耦合统一的讨论通常依赖于对 GUT 附近物理的假设，而改变这些假设（例如考虑非最小的规范场动能项）就可放松对 M_c 的限制。然而，构造一个更容易与质子稳定性、规范耦合统一、以及带色 Higgs 质量等限制相容的暴胀模型，应该是解决所有这些问题更好的方式。我们将在下一小节看到，将以上模型推广到 Flipped $SU(5)$ 或 Pati-Salam 模型，都可以解决这些问题。

暴胀轨道的稳定性 上文的讨论假设了暴胀期间， $\phi_i = (H_c, \bar{H}_c, H_u^\pm, H_d^\pm, \theta, \varphi)$ 皆为零。现检查之。方式是，计算暴胀期间这些场在其零点 $\phi_i = 0$ 处的有效质量（effective mass） $M_{ij}^2 \equiv \frac{1}{2}(\partial^2 V / \partial \phi_i \partial \phi_j)$ 。若此质量为正且该方向的一阶导 $\partial V / \partial \phi_i = 0$ ，则意味着暴胀轨道在场空间相应的方向上是局部极小，否则，暴胀轨道在这些方向上就不稳定，即所谓快子不稳定性（tachyonic instability）。

在暴胀期间， $1 \lesssim H_1 < \sqrt{6/(1-\zeta)}$ 。此时有效质量矩阵 M_{ij}^2 有分块对角的形式。因此，我们将待检验的场按 M^2 的对角块分为四组，即带色的 Higgs 场 (H_c, \bar{H}_c) 、带电的 Higgs 场 (H_u^\pm, H_d^\pm) 、中性 Higgs 场的相角 (θ, φ) ，以及单态 S 场的两个实分量 $S \equiv s + it$ 。

对于带色的 Higgs 方向 (H_c, \bar{H}_c) ，不失一般性，只需考虑其三个色分量中的一个。我们进一步将之参数化为 $H_c = h_c e^{i\theta_c}$ 和 $\bar{H}_c = \bar{h}_c e^{i\bar{\theta}_c}$ 。在 $(h_c - \bar{h}_c)$ 方向的稳定性由标量势的 D 项保证，而 $(h_c + \bar{h}_c)$ 方向的有效质量为 $M_c^2 = 2\beta_1^2 u^4 > 0$ 。同样，我们也检查了暴胀轨道在 $(\theta_c, \bar{\theta}_c)$ 方向的稳定性。带电 Higgs 方向的结果与 (H_c, \bar{H}_c) 相似。

对于中性 Higgs 的相角 (θ, φ) , 我们有如下 2×2 的质量矩阵,

$$M_{\theta\theta}^2 = M_{\varphi\varphi}^2 = \frac{\beta_1^2 u^4 H_1^4}{\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^4} \left[\frac{1}{3} + \frac{8\zeta^2 + 17\zeta - 7}{144} H_1^2 + \frac{5\zeta^3 - 6\zeta + 1}{432} H_1^4 + \frac{(1-\zeta)^2(17\zeta^2 + 4\zeta - 3)}{20736} H_1^6 \right], \quad (5.41a)$$

$$M_{\theta\varphi}^2 = M_{\varphi\theta}^2 = \frac{\beta_1^2 u^4 H_1^4}{\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^4} \left[\frac{3\zeta + 1}{12} + \frac{14\zeta^2 + 5\zeta - 1}{144} H_1^2 + \frac{13\zeta^3 - 9\zeta^2 - 3\zeta - 1}{864} H_1^4 + \frac{\zeta(10\zeta - 1)(\zeta - 1)^2}{10368} H_1^6 \right]. \quad (5.41b)$$

此矩阵的两个本征值为,

$$M_1^2 = \frac{\beta_1^2 u^4 H_1^4}{\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^4} \left[\frac{3\zeta + 5}{12} + \frac{11\zeta^2 + 11\zeta - 4}{72} H_1^2 + \frac{23\zeta^3 - 9\zeta^2 - 15\zeta + 1}{864} H_1^4 + \frac{(1-\zeta)^2(37\zeta^2 + 2\zeta - 3)}{20736} H_1^6 \right], \quad (5.42a)$$

$$M_2^2 = \frac{\beta_1^2 u^4 H_1^4}{\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^4} \left[\frac{1-\zeta}{4} - \frac{(1-\zeta)^2}{24} H_1^2 + \frac{(1-\zeta)^3}{288} H_1^4 - \frac{(1-\zeta)^4}{6912} H_1^6 \right]. \quad (5.42b)$$

这两个本征值在 $\zeta \in [0, 1]$ 以及 $H_1 < \sqrt{6/(1-\zeta)}$ 范围内皆正定. 因此, 暴胀轨道在 (θ, φ) 方向亦稳定.

最后, 在 (s, t) 方向上, 有效质量矩阵为,

$$M_{ss}^2 = M_{tt}^2 = \frac{\beta_1^2 H_1^4}{4 \left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^2}, \quad M_{st}^2 = M_{ts}^2 = 0. \quad (5.43)$$

因此暴胀轨道在这方向上稳定. 到此, 我们已经检查过所有有关的方向, 说明了在暴胀期间, 假设 $(H_c, \bar{H}_c, H_u^\pm, H_d^\pm, \theta, \varphi) = 0$ 是正确的.

5.2.3 推广：Flipped $SU(5)$ 模型与 Pati-Salam 模型

在 $SU(5)$ 之后, 下一个最简单的大统一单群是 $SO(10)$. 将 $SO(10)$ 破缺为标准模型规范群, 通常需要两步. 除了 $SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow \text{SM}$ 、即用 $SU(5)$ 作为中间群的方式外, 至少还有 Flipped $SU(5)$ 和 Pati-Salam 两种选择. 本节将前节的 $SU(5)$ 模型推广到这两种 GUT^[256].

Flipped $SU(5)$ 大统一 Flipped $SU(5)$ 的规范群是 $SU(5) \otimes U(1)$. 将以上 $SU(5)$ 模型推广到 Flipped $SU(5)$ 是直接的. 为此, 我们需要一对 GUT Higgs 场 (G, \bar{G}) , 分别携带 $SU(5) \otimes U(1)$ 的 $(\mathbf{10}, 1)$ 和 $(\bar{\mathbf{10}}, -1)$ 表示. 它们将负责 GUT 规范群的破缺. 此外, 如同前节, 我们仍然需要一对 $SU(5)$ 基础表示的 Higgs 场 (H, \bar{H}) , 它

们将包含低能 MSSM 的一对 Higgs 二重态. 这里, 要求它们在 $SU(5) \otimes U(1)$ 下分别取 $(\mathbf{5}, 1)$ 和 $(\bar{\mathbf{5}}, 2)$ 表示. 注意到的 $\mathbf{10}$ 表示实为 $SU(5)$ 的反对称张量, 因而可将 G 表为如下的分量形式,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & d_{G_3}^c & -d_{G_2}^c & d_{G_1} & u_{G_1} \\ & 0 & d_{G_1}^c & d_{G_2} & u_{G_2} \\ & & 0 & d_{G_3} & u_{G_3} \\ & & & 0 & v_G^c \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

\bar{G} 的分量形式与此类似, 而 (H, \bar{H}) 的分量形式同 (5.20) 式与 (5.31) 式. 在以上表达式中, 各分量的记号提示其与标准模型费米子在 $SU(5)$ 下有相同的表示.

现在, 我们介绍此 Flipped $SU(5)$ 模型的 Kähler 势与超势. 首先, Kähler 势仍有无标超引力给出,

$$\mathcal{K} = -3 \log \left[T + T^* - \frac{1}{3} \left(|\Phi_i|^2 + \xi (H \bar{H} + \text{h.c.}) \right) \right], \quad (5.45)$$

其中, $\Phi_i = (G, \bar{G}, H, \bar{H}, \dots)$, 省略号代表在此处不重要的夸克与轻子, 而 ξ 项如同前节, 是对无标 Kähler 势的简单变形. 这里, 我们已使用简化记号 $|G|^2 \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(G^\dagger G)$, $|H|^2 \equiv H^\dagger H$.

对目前的模型, 选取超势如下,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & -M G \bar{G} - m H \bar{H} + \lambda G G H + \bar{\lambda} \bar{G} \bar{G} \bar{H} \\ & + \alpha (G \bar{G})^2 - \beta (H \bar{H})^2 + \gamma (G \bar{G})(H \bar{H}), \end{aligned} \quad (5.46)$$

其中 $G \bar{G} \equiv \frac{1}{2} G_{ij} \bar{G}^{ij}$, $G G H \equiv \frac{1}{4} \epsilon^{ijklm} G_{ij} G_{kl} H_m$, $\bar{G} \bar{G} \bar{H}$ 与此类似. 以上超势已包括所有直到量纲为 4 的、对称性所允许的项. 值得注意的是, 其中每一项对模型都是重要的. 其中, M 项和 α 项可导致 GUT 破缺, m 项和 γ 项保证 MSSM Higgs 二重态的质量远低于 GUT 尺度, $(\lambda, \bar{\lambda})$ 项保证带色荷的 Higgs 场很重, 而 β 项可导致暴胀期间平坦的标量势. 以下, 我们就其中各项的作用作更仔细的讨论.

按 (2.39) 可求出该理论的 F 项标量势 V_F , 其完整形式非常复杂, 我们在不同的极限下考察之. 首先, 在低能下, 标量势中只依赖于 (G, \bar{G}) 场的部分为,

$$V_F(G) = 2G \bar{G} (M - 2\alpha G \bar{G})^2. \quad (5.47)$$

因而在低能下有 GUT 破缺的真空 $\langle G \bar{G} \rangle = M/(2\alpha)$. 使用 $SU(5)$ 对称性, 总可以将 $(\langle G \rangle, \langle \bar{G} \rangle)$ 的非零分量转至“中微子方向”, 即 $\langle v_G^c \rangle = \langle \bar{v}_G^c \rangle \equiv v_G = \sqrt{M/2\alpha}$ 而所有其他分量为零. 其次, 为了 MSSM Higgs 二重态很轻, 我们引入条件,

$$m = \gamma v_G^2. \quad (5.48)$$

从而，超势中的 $(\lambda, \bar{\lambda})$ 项导致标量势中带色 Higgs 场 (H_c, \bar{H}_c) 的质量项，

$$V \supset 4\lambda^2 v_G^2 |H_c|^2 + 4\bar{\lambda}^2 v_G^2 |\bar{H}_c|^2. \quad (5.49)$$

对于超对称大统一理论，规范耦合常数的统一给出 $v_G \simeq 2 \times 10^{16} \text{GeV}$ ，因而带色 Higgs 场的质量 $m_{H_c} = 2\lambda v_G$ 可以非常重。

现在，我们回到暴胀期间。仍如前节，将 (H_u, H_d) 的中性分量按 (5.32) 参数化，并将 D 项平坦的方向 $H_1 \equiv |H_u^0| + |H_d^0|$ 认作暴胀子。在暴胀期间， $H_1 \sim \mathcal{O}(M_P)$ ，从而为 (G, \bar{G}) 场的有效质量提供了很大的正贡献，这使得 (G, \bar{G}) 在暴胀期间的真空值为 0。观察超势 (5.46) 可知， G 的有效质量为正，要求 $\langle H \bar{H} \rangle > M/\gamma$ ，而这是在暴胀期间很容易满足。因而，我们可在以下的暴胀分析中取 $G = \bar{G} = 0$ 。如同前节，我们还可将 (H, \bar{H}) 中除了暴胀子之外的所有方向都取为零，这样做的正确性来自暴胀期间各标量场的有效质量在暴胀轨道上皆正定，而这一点我们在前节已经仔细检查过，故而可以直接写下只包含暴胀子 H_1 的标量势为，

$$V(H_1) = \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2m} H_1^2\right)^2 m^2 H_1^2}{2\left(1 - \frac{1-\zeta}{6} H_1^2\right)^2}. \quad (5.50)$$

这与前节的 $SU(5)$ 理论的标量势 (5.33) 几乎一致。因而，与前节平行，可取 $\beta = m(1 - \zeta)/3$ 以消去极点，从而得到 $V(H_1) = m^2 H_1^2 / 2$ 。与此同时， H_1 的动能项仍然由 (5.36) 给出，因而以下分析与前节完全相同。

尽管与前节的 $SU(5)$ 模型给出完全相同的暴胀观测量，此处所描述的 Flipped $SU(5)$ 仍有几处明显的优点。其一，此模型无需额外的离散 \mathbb{Z}_2 对称性，仅用其规范对称性、以及各场的表示所允许的最一般的超势 (5.46)，就能构造经济而成功的暴胀模型。其二，此模型中的 GUT Higgs 场属于 **10** 表示而非伴随 (**24**) 表示，因而更容易通过超弦理论而得。其三，也是最重要的一点，是此模型中暴胀子的质量 $m \sim \mathcal{O}(10^{13}) \text{GeV}$ 与带色 Higgs 场的质量 $2\lambda v_G$ 没有任何关联，因而可避免带色 Higgs 场质量的各种实验观测限制对暴胀模型的影响。最后，Flipped $SU(5)$ 模型中没有导致质子衰变的量纲 5 算子 [57]，因而受质子衰变观测的限制更弱。

Pati-Salam 模型 以上的无标大统一 Higgs 暴胀模型亦可容易地推广到 Pati-Salam 大统一理论中。此类模型具有规范群 $SU(4) \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ ，因而可嵌入 $SO(10)$ 中。在该规范群下，我们引入一对 GUT Higgs 场 (G, \bar{G}) ，分别居于规范群的 $(\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ 与 $(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}})$ 表示，同时引入一个 $(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ 表示的 D 和一个 $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$ 表示的 H 。值得指出， (D, H) 可被嵌入一个 $SO(10)$ 的 **10** 表示中，即有 $\mathbf{10} \rightarrow (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}})$ 。

我们可将 GUT Higgs 场 (G, \bar{G}) 参数化为,

$$G = \begin{pmatrix} \bar{u}_{G1}^c & \bar{u}_{G2}^c & \bar{u}_{G3}^c & \bar{v}_G^c \\ \bar{d}_{G1}^c & \bar{d}_{G2}^c & \bar{d}_{G3}^c & \bar{e}_G^c \end{pmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} u_{G1}^c & u_{G2}^c & u_{G3}^c & v_G^c \\ d_{G1}^c & d_{G2}^c & d_{G3}^c & e_G^c \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

同时将 H 参数化为,

$$H = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

它在 $SU(2)_R$ 破缺后分裂为 MSSM 的两个二重态 (H_u, H_d) . 另外, D 可参数化为 4 阶反对称方阵, 此处不显式写出.

我们仍使用无标超引力的 Kähler 势 (5.45), 取其中 $\Phi_i = (G, \bar{G}, D, H, \dots)$, 此处仍然省略对暴胀过程不重要的轻子和夸克场. 与此同时, 取如下直到量纲 4 的最一般的超势,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & -M G \bar{G} - m H^2 + \lambda D G G + \bar{\lambda} \tilde{D} \bar{G} \bar{G} \\ & + \alpha (G \bar{G})^2 + \beta (H^2)^2 + \gamma (G \bar{G}) H^2, \end{aligned} \quad (5.53)$$

其中 $H^2 \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon^{k\ell} H_{ik} H_{j\ell}$, $\tilde{D}^{ij} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} D_{kl}$. 此超势与上文 Flipped $SU(5)$ 模型的超势 (5.46) 具有相同的形式, 其中 M 项和 α 保证 GUT 在低能下破缺, (G, \bar{G}) 在 GUT 破缺的真空中获得很大的期望值, 且此期望值总可通过规范对称性转到 (v_G, \bar{v}_G) 方向, 即有 $\langle v_G^c \rangle = \langle \bar{v}_G^c \rangle \equiv v_G \simeq 2 \times 10^{16} \text{GeV}$. 这将使 $SU(4) \otimes SU(2)_R$ 破缺到 $SU(3)_c \otimes U(1)_{B-L}$, 于是 (G, \bar{G}) 中, $(\bar{u}_{Gi}^c, u_{Gi}^c)$ 与 (\bar{e}_G^c, e_G^c) 的 8 个实分量将被破缺的规范对称性对应的规范场“吃掉”, 而其余 8 个实分量, 以及 (\bar{v}_G^c, v_G^c) , 将获得很重的质量 $\sim M$. 与此同时, $(\lambda, \bar{\lambda})$ 项保证 (\bar{d}_G^c, d_G^c) 分量和 D 中的各分量获得很大的质量 $\sim M$. 我们仍然将暴胀子取为 D 项平坦的方向 $H_1 \equiv |H_u^0| + |H_d^0|$, 因而其暴胀势、动能项, 以及对暴胀观测量的分析, 与上文的 $SU(5)$ 与 Flipped $SU(5)$ 完全相同, 此不赘述.

5.3 渐进安全的 Higgs 暴胀

作为本章讨论的最后一个例子, 我们在渐进安全的量子引力理论中实现 Higgs 暴胀 [126]. 以上各节所讨论的模型都通过引入新的粒子以解决 Higgs 真空的稳定性问题, 而本节所讨论的模型, 则是通过量子引力效应以解决之, 因而不需要新粒子的参与. 与此同时, 此模型亦不需要 Higgs 场的非最小耦合项 $\mathcal{R} H^\dagger H$, 因而它是对标准模型 Higgs 很简省的推广.

我们在 2.4 节已介绍了渐进安全的量子引力. 在这种模型中, 量子引力理论的重整化群流在红外对应于广义相对论, 而在紫外存在非平凡的固定点, 因而对应

于具有相互作用的共形场论。由于这种效应，各种耦合常数的跑动在紫外会被修改。一般地，物质场的耦合常数，如规范耦合和 Higgs 自耦合，在这类理论的紫外行为并不是唯一确定的。文献中的相关计算发现，物质场耦合在紫外既有非平凡的固定点，也有高斯型固定点 [257,258]。后者对应于所有物质耦合常数在紫外趋于零。

本节所讨论模型即取高斯型紫外固定点，且假设，量子引力效应起作用的能量尺度大约在 10^{11}GeV 左右，与 Higgs 自耦合常数 λ 降至 0 的尺度同量级。与此同时，所有物质场间的耦合、包括规范耦合与 Yukawa 耦合，亦在此尺度降至零。我们在此前已讨论过 TeV 尺度的量子引力效应，如额外维理论和 TeV 尺度的维数自发缩减，因此出现在 10^{11}GeV 位置的量子引力效应并不意外。

为确定起见，设量子引力开始起作用的尺度为 μ_{tr} ，并称之为转换尺度。在 μ_{tr} 之下，Planck 质量 M_p 与宇宙学常数 Λ 保持尺度无关，即不随能量尺度跑动。在 μ_{tr} 之上，相应的无量纲量 $(\widetilde{M}_p, \widetilde{\Lambda})$ 保持固定，而 (M_p, Λ) 则依其量纲按幂次跑动（参见图 2.3）。另一方面，将标准模型 Higgs 自耦合 λ 依据标准模型 β 函数而跑动至零的尺度记为 μ_0 （参见图 5.1 中的 $\lambda(\text{SM})$ ）。根据上述假设， μ_{tr} 与 μ_0 同量级，因此可设 $\mu_{\text{tr}} = C\mu_0$ ，其中系数 $C \sim \mathcal{O}(1)$ 。

为简化计，我们设 Higgs 自耦合 $\lambda(\mu)$ 在 $\mu < \mu_0$ 按标准模型 β 函数跑动，在 $\mu \geq \mu_0$ 时保持为 0^①。在更仔细的研究中， λ 应当从低能的标准模型区域光滑地过渡到为高能的渐进安全区域，其过渡的细节需要通过解精确的重整化群方程而得。这一细节在此处并不重要。于是，根据这些假设，我们可以画出 $\lambda(\mu)$ 作为 μ 的函数。但需注意到， μ_0 敏感地依赖于 Higgs 质量 m_h 和顶夸克质量 m_t 。通过观察 λ 的 β 函数易见， m_h 愈大， μ_0 愈高；而 m_t 愈大， μ_0 愈低。为了直观地显示这些结果，我们在图 5.7 中固定顶夸克质量为 $m_t = 173.3\text{GeV}$ ，并取 $m_h = (125, 126, 127)\text{GeV}$ ，以展示 $\lambda(\mu)$ 随 μ 跑动的行为。至于规范耦合和 Yukawa 耦合，我们只需知道它们在 μ_0 附近趋于零，其定量的跑动行为并不重要。

以下考虑暴胀期间的物理。首先，标准的 FRW 宇宙学仍然成立，唯一需要改动的是， M_p 在高能时 ($\gtrsim \mu_{\text{tr}}$) 按幂次跑动，即有，

$$M_p^2(\mu) = M_{p0}^2 \left(1 + \frac{\mu^2}{\mu_{\text{tr}}^2}\right), \quad (5.54)$$

这里 $M_{p0} \simeq 2.4 \times 10^{18}\text{GeV}$ 是通常的约化 Planck 质量，而 μ 是重整化群的跑动尺度。在此模型中， μ 的选取与标准 Higgs 暴胀很不相同。现在详细讨论之。

重整化群跑动的尺度 μ 的选取，受到两方面的约束 [260]。一方面， μ 的选取应

^① 这种可能性，即 λ 与其 β 同时趋于零，曾被用于预测 Higgs 粒子的质量 [259]。

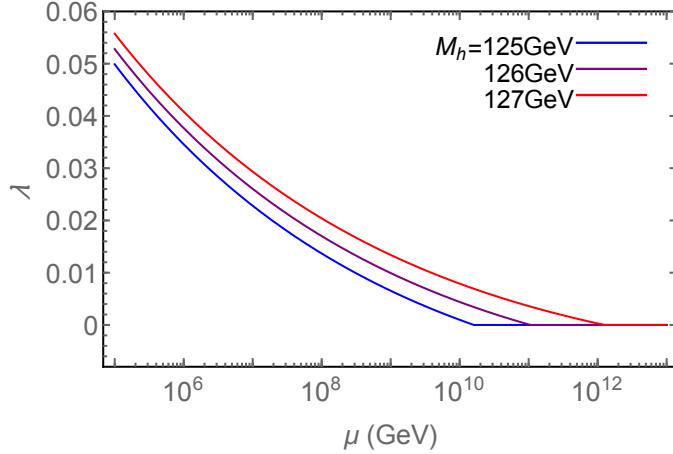


图 5.7 渐进安全 Higgs 暴胀模型中 Higgs 自耦合 $\lambda(\mu)$ 作为重整化尺度 μ 的函数. 蓝、紫、红色曲线分别对应于取标准模型 Higgs 质量为 (125, 126, 127)GeV 的结果.

使辐射修正尽量小. 注意到标量势 V 的一圈图修正一般有如下形式,

$$\Delta V = \sum_j \frac{z_j M_j^4}{16\pi^2} \log \frac{M_j^2}{\mu^2}, \quad (5.55)$$

其中的求和指标 j 遍及所有与 Higgs 粒子 h 耦合的标准模型粒子, z_j 为 $\mathcal{O}(1)$ 的系数, 而 M_j 为相应圈图中圈粒子的有效质量. 有效质量 M_j 依赖于 Higgs 场的背景值 h 和时空曲率 $\mathcal{R} \sim \mathcal{H}^2$, 且有如下形式,

$$M_j^2 = \mathcal{O}(\lambda_j) h^2 + \mathcal{O}(1) \mathcal{H}^2, \quad (5.56)$$

其中 λ_j 是粒子 j 与 Higgs 场的耦合常数, \mathcal{H} 是 Hubble 参数. 在通常的 Higgs 暴胀理论中, h 在暴胀期间位于 $\mathcal{O}(M_p)$, 而 $\mathcal{H} \sim 10^{14}\text{GeV} \ll M_p$, 且 $\lambda_j \sim \mathcal{O}(1)$. 因此, 上式右边第一项远大于第二项, 故后者可忽略. 在这种情况下, 可选取重整化尺度^① $\mu \sim h$. 然而在目前的模型中, $\lambda_j \simeq 0$, 这导致 (5.56) 中第一项远小于第二项. 因此, 应选取 $\mu = \mathcal{H}$.

另一方面, 重整化尺度 μ 的选取也需使作用量中高阶算子的修正尽量小. 一般而言, 引力的有效拉格朗日量 \mathcal{L}_{eff} 中高阶算子有如下形式,

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{eff}} = \sqrt{-g} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^{n-2} \sum_j \frac{w_j^{(mn)}}{\mu_{\text{tr}}^{2(n-2)}} O_j^{(n,m)}(\nabla^{2m}; \mathcal{R}^{n-m}), \quad (5.57)$$

其中, $O_j^{(n,m)}(\nabla^{2m}; \mathcal{R}^{n-m})$ 代表 $2m$ 个协变导数 ∇_μ 与 $n - m$ 个曲率张量因子的乘积, 且完全缩去 Lorentz 指标. 指标 j 标记给定 (n, m) 时所有独立的算子 $O_j^{(n,m)}$.

^① 这里没有 Weyl 因子 Ω 是因为我们未引入非最小耦合 ξ . 在标准 Higgs 暴胀中, 这对应于重整化规定 II. 在规定 I 中, $M_j \propto h/\Omega$, 故应取 $\mu = h/\Omega$. 详见 4.4 节讨论.

注意到，在暴胀期间 $\mathcal{R} \simeq \mathcal{H}^2$, $O_j^{(n,m)} \sim \mathcal{H}^{2n}$. 下文将说明，在暴胀期间，总有 $\mathcal{H} < \mu_0$. 因此， $\Delta\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 中的每一项都约为 $\mathcal{O}(\mathcal{H}^{2n}/\mu_{\text{tr}}^{2(n-2)}) < \mathcal{O}(C^{2(2-n)}\mu_0^4)$. 与有效作用量中的领头阶 $M_{\text{P}}^2\mathcal{R} \sim M_{\text{P}}^2\mathcal{H}^2$ (即 Einstein-Hilbert 作用量) 相比，有，

$$\frac{O_j^{(n,m)}}{M_{\text{P}}^2\mathcal{R}} \sim C^{2(2-n)} \left(\frac{\mu_0}{M_{\text{P}}}\right)^2. \quad (5.58)$$

因此，当 $C > 1$ 时，高阶算子的修正就可收敛，且其和被因子 $(\mu_0/M_{\text{P}})^2$ 压低，故而高阶算子的修正总能被忽略。这说明，依照 $\mu = \mathcal{H}$ 选取重整化尺度是恰当的。

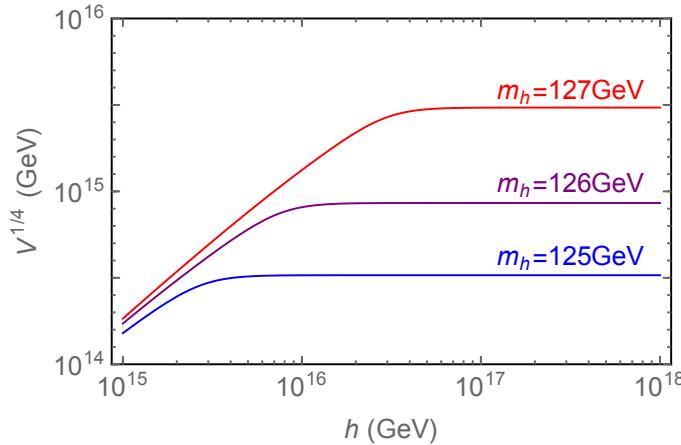


图 5.8 渐进安全 Higgs 暴胀模型的暴胀势。蓝、紫、红色曲线分别对应于取标准模型 Higgs 质量为 (125, 126, 127)GeV 的结果。

现在我们观察暴胀势 $V(h) = \frac{1}{4}\lambda(\mathcal{H})h^4$. 如若慢滚假设成立，则可写出 V 满足的 Friedmann 方程如下，

$$3M_{\text{P}}^2(\mathcal{H})\mathcal{H}^2 = V = \frac{1}{4}\lambda(\mathcal{H})h^4. \quad (5.59)$$

如果我们选取暴胀的初始条件满足慢滚假设，即 $\dot{\phi}^2 \ll V$ ，则容易看出，慢滚假设在随后的演化中也将成立很长一段时间。事实上， \mathcal{H} 随 h 的增加而升高，但 $\lambda(\mathcal{H})$ 随着 \mathcal{H} 的增加而减小。因此当 h 增大时， $\lambda(\mathcal{H})$ 倾向于使 V 减小，而 h^4 倾向于使 V 增大。这两个相互竞争的因素最终会使 V 在大 h 极限下趋于常数，因为 \mathcal{H} 不可能超 μ_0 ——否则， $\lambda(\mathcal{H})$ 将趋于零，这又使 \mathcal{H} 变得很小。由此，我们得出结论：总可以选取暴胀的初始条件使慢滚假设在其后的演化中成立。图 5.8 给出了顶夸克质量为 $m_t = 173.3$ GeV 时，Higgs 质量为 (125, 126, 127)GeV 所对应的暴胀势。

由以上准备，现在可以计算渐进安全 Higgs 暴胀模型中的可观测量。在此模型中，暴胀结束的条件由 $|\eta| = 1$ 给出。选取暴胀 e 重数在 50 到 60 之间，可依标准程序计算出标量扰动的幅度 (V/ϵ)^{1/4}、谱指数 $n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta$ ，以及张标比 $r = 16\epsilon$ ，

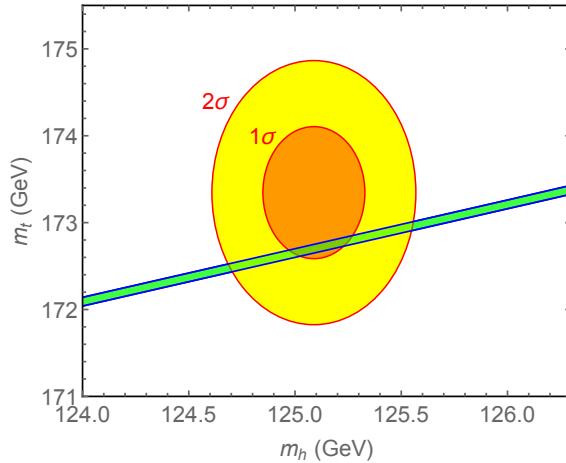


图 5.9 渐进安全 Higgs 暴胀模型对顶夸克质量 m_t 与 Higgs 质量 m_h 的限制. 绿色区域代表 Planck 所测量的标量扰动的振幅对 (m_t, m_h) 的限制, 其不确定度来自测量结果的不确定度, 以及 $50 \leq N_e \leq 60$ 的不确定度; 橙色与黄色区域分别代表目前对撞机实验对 m_t 与 m_h 在 1 与 2 个标准偏差内的测量值.

其中 ϵ, η 是前两个慢滚参数. 从图 5.8 可看出, 此模型中暴胀势的大小敏感地依赖于 Higgs 质量 m_h , 从而也敏感地依赖于顶夸克质量 m_t . 因此, 通过 CMB 观测而定的标量扰动幅度 $(V/\epsilon)^{1/4}$ 给 (m_h, m_t) 带来了非平凡的限制, 如图 5.9 所示. 其中, 绿色区域对应于由 CMB 测量而得的标量扰动的幅度 [171], 以及 e 重数取在 $[50, 60]$ 之间对 (m_h, m_t) 的限制. 可以看到, 这限制和目前对撞机实验的测量结果在 1σ 的范围内相容.

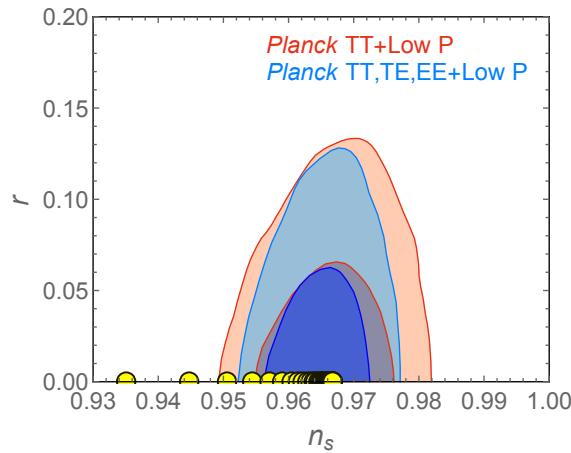


图 5.10 渐进安全的 Higgs 暴胀模型所预言的标量谱指数 n_s 与张标比 r . 蓝色和红色阴影所代表的观测限制取自 [172].

同时, 我们将该模型对 (n_s, r) 的预言列于图 5.10 中. 其中, 各黄色圆点自左至右对应于未定自由参数 C 自 1 至 10 按间隔 $\Delta C = 0.2$ 取值的结果. $C = 1$ 给出

$n_s = 0.935$, 而 $C = 10$ 给出 $n_s = 0.967$. 另一方面, 该模型对 r 的预言都在 $\mathcal{O}(10^{-7})$ 左右. 上文提到, 有效作用量中高阶算子修正足够小要求 $C > 1$, 从图 5.10 可见, 与观测符合的参数区域也对应于 $C > 1$.

以上讨论了将 Higgs 暴胀嵌入渐进安全量子引力的一种模型. 由于渐进自由的物质场耦合, Higgs 势在高能呈现出极为平坦的形状, 因而无需额外加入非最小耦合项, 即可满足慢滚条件. 这个例子启发我们考虑更一般的标度不变或共形不变的理论中的暴胀模型, 特别是 Higgs 暴胀模型.

第 6 章 结语

本文成文之时，适逢大型强子对撞机（LHC）重新运行，并提升质心能量至 13TeV 的过程。2012 年在 LHC 上发现的 Higgs 玻色子为过去几十年粒子物理学标准模型的辉煌胜利画上句号。至此，标准模型所有基本粒子皆已被实验发现。今后，粒子物理学的对撞机实验如若发现任何新粒子或新信号，必然都是超越标准模型的新物理。我们正站在粒子物理学新时代的起点。

与此同时，随着宇宙微波背景辐射、大尺度结构等宇宙学测量精度的不断提升，宇宙学在过去几十年已迅速进化为精确的定量科学。如今，我们已能在百分之几甚至更高的精度下谈论 Hubble 参数、宇宙年龄、可见宇宙的能量构成，以及原初扰动的形状。精确宇宙学不只为我们提供了宇宙的数值信息，同时为我们探测极高能的物理现象打开了新的窗口。形象地说，暴胀中的宇宙是我们目前所能利用的能量最高的“对撞机”^[261]。

粒子物理学与宇宙学的革命性进步为我们重新审视关于质量起源与万有引力的古老问题提供了新的契机。在此背景下，本文所作的研究与其说是对这些古老问题的回答，毋宁说是为更深刻地理解这些问题的抛砖引玉之作。此处，我们不拟简单重复前文各章的结果，而是就其中若干问题略作评论，并指出与之相关的值得今后继续研究的方向。

在第 3 章中，我们研究了两种 TeV 尺度的量子引力效应对弱规范玻色子散射的影响，换言之，即对电弱破缺过程的影响。这两种效应分别是时空维数的自发缩减，以及引力与 Higgs 场的非最小耦合。这些效应在弱规范玻色子散射上的信号至少有两个共同特点，一是散射截面中无共振型信号，而只有对标准模型背景的抬升或压低；二是，无论是抬升还是压低，这些散射截面的基本形状都与散射道无关。在第 3 章中我们已经指出，与散射道无关的特性是量子引力信号的特点，因为它对规范群的结构不敏感。而无共振信号的特点，则是因为此章考虑了强耦合的量子引力。我们在 2.1 节曾指出，散射振幅树图幺正性在高能的破坏，或者可借助弱耦合的新自由度以恢复，或者可由强耦合本身以恢复。因而，一般说来，弱耦合的量子引力信号通常会出现共振峰，而强耦合量子引力信号，则是对散射截面的整体抬升或压低。在前者有共振峰的情形，卷曲额外维模型中 Kaluza-Klein 引力子的信号即是一个例子。另外，还有证据表明，量子引力的紫外完备化如果是弱耦合理论，则很有可能是（或至少很像是）微扰弦理论^[262]。而在强耦合的情形，本文所研究的两类现象就是很好的例子。

此外，第 3 章考虑了用弱规范玻色子探测引力与 Higgs 场的非最小耦合。这不是唯一的可能性。实际上，由于非最小耦合在 Einstein 系中修改了 Higgs 的自相互作用，且由之新引入的算子正比与 Higgs 玻色子 h 的能量，因而可以通过 $h^* \rightarrow hh$ 等过程，来探测 Higgs 三点相互作用对标准模型的偏离。另外，本文对弱规范玻色子散射的讨论仅限于部分子层面（parton level）；更完整的现象学研究，需要一并考虑强子对撞机上初态粒子的部分子分布与末态玻色子的衰变。

在第 4、5 两章中，我们仔细探讨了用 Higgs 场驱动早期宇宙暴胀的可能性。我们定量澄清了，标准模型 Higgs 暴胀的最大困难，并不在于其幺正性问题，而在于 Higgs 势在暴胀期间的正定性问题（或等价地，Higgs 电弱真空的稳定性问题）。解决此问题最直接的方案就是考虑新物理模型。为此，我们讨论了 TeV 质量的新粒子、无标超引力大统一理论，以及渐进安全的量子引力三种方案。这三种方案均可确保 Higgs 真空的稳定性，并与 Higgs 玻色子和顶夸克质量的对撞机测量结果相容。与此同时，关于 Higgs 暴胀，仍有不少本文未能涉及的问题。

第一类问题涉及非最小耦合模型中 Jordan 系与 Einstein 系的关系。此处举其两端：其一，在包含非最小耦合的暴胀模型中，是否能将所有的分析在 Jordan 系中完成、而不借助 Weyl 变换，是值得关注的问题；其二，Jordan 系与 Einstein 系在计算暴胀可观测量时的（不）等价性仍然值得进一步澄清。

第二类问题涉及 Higgs 暴胀的紫外修正。在我们所考虑的各类 Higgs 暴胀模型中，Higgs 场在暴胀期间的值可大至 Planck 质量。如同所有的大场暴胀模型，这里自然的问题是，如何保证如此大的暴胀场下的物理图像不被量子引力效应所强烈地修改。对此，容易想到的解决方案是引入某种近似的平移对称性。但进一步的问题是，量子引力如何保持此对称性。看来，完整地回答这一问题需要考虑量子引力的理论。在 Higgs 暴胀的情形，已有将其嵌入超弦理论的尝试^[263–265]，但这一问题显然值得继续研究。

第三类问题涉及 Higgs 暴胀的一般性质。本文讨论了 Higgs 暴胀在数种新物理模型中的变体。因而，自然的问题是，Higgs 暴胀中是否有任何与模型无关的普遍性质。就我们目前的认识，对此问题的回答，需要对 Higgs 暴胀及其各种变体的非高斯性作仔细的考察。显然，如果暴胀宇宙可被当作超高能的“宇宙加速器”来使用，则非高斯性作为暴胀观测量，必有核心的重要性。

值得指出，以上提到的三类问题，即 Jordan 系与 Einstein 系的等价性、大场暴胀模型的紫外修正，以及非高斯性，并不仅限于 Higgs 暴胀，而是可以在更一般的暴胀模型中予以研究。这其中的很多方面都是当前暴胀理论研究的热点问题。

以上是对本文研究内容的简单评论和对相关问题的展望。我们热切希望，随

着 LHC 在更高能量的运行、未来对撞机的建造、以及更多精确宇宙学观测的开展，粒子物理与宇宙学在不远的将来会取得更多重大的突破。最后，我们用 R. M. Rilke 的一段诗^①结束本文：

<i>Nous poursuivons notre tort en obstinés que nous sommes; mais entre les torts des hommes c'est un tort tout en or.</i>	我们固执已见 落入迷途而不知返； 但在人类的所有迷途中 这条迷途金光灿灿
---	---

^① 《缴给法兰西温柔的税》之十五。中译文取自《里尔克法文诗》，何家炜译，吉林出版集团有限责任公司，2007年。

参考文献

- [1] J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos. *Derivation of gauge invariance from high-energy unitarity bounds on the S matrix*. Phys. Rev. D, 1974. **10**: 1145–1167.
- [2] C. Vayonakis. *Born helicity amplitudes and cross-sections in non-Abelian gauge theories*. Lettere Al Nuovo Cimento Series 2, 1976. **17**: 383–387.
- [3] B. W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker. *Weak interactions at very high energies: The role of the Higgs-boson mass*. Phys. Rev. D, 1977. **16**: 1519–1531.
- [4] M. S. Chanowitz and M. K. Gaillard. *The TeV physics of strongly interacting W's and Z's*. Nuclear Physics B, 1985. **261**: 379 – 431.
- [5] H.-J. He, Y.-P. Kuang, and X. Li. *On the precise formulation of the equivalence theorem*. Phys. Rev. Lett., 1992. **69**: 2619–2622.
- [6] H.-J. He, Y.-P. Kuang, and X. Li. *Further investigation on the precise formulation of the equivalence theorem*. Phys. Rev. D, 1994. **49**: 4842–4872.
- [7] H.-J. He, Y.-P. Kuang, and C.-P. Yuan. *Equivalence theorem and probing the electroweak symmetry-breaking sector*. Phys. Rev. D, 1995. **51**: 6463–6473.
- [8] H.-J. He and W. B. Kilgore. *Equivalence theorem and its radiative-correction-free formulation for all R_ξ gauges*. Phys. Rev. D, 1997. **55**: 1515–1532.
- [9] H.-J. He, Y.-P. Kuang, and C. Yuan. *Global analysis for probing electroweak symmetry breaking mechanism at high-energy colliders*. 1997. arXiv:hep-ph/9704276.
- [10] S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. *Structure of Phenomenological Lagrangians. I.* Phys. Rev., 1969. **177**: 2239–2247.
- [11] C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. *Structure of Phenomenological Lagrangians. II*. Phys. Rev., 1969. **177**: 2247–2250.
- [12] H. Leutwyler. *On the Foundations of Chiral Perturbation Theory*. Annals of Physics, 1994. **235**: 165 – 203.
- [13] J. Wess and B. Zumino. *Consequences of anomalous ward identities*. Physics Letters B, 1971. **37**: 95 – 97.
- [14] E. Witten. *Global aspects of current algebra*. Nuclear Physics B, 1983. **223**: 422 – 432.
- [15] S. L. Glashow. *Partial-symmetries of weak interactions*. Nuclear Physics, 1961. **22**: 579 – 588.
- [16] S. Weinberg. *A Model of Leptons*. Phys. Rev. Lett., 1967. **19**: 1264–1266.

-
- [17] A. Salam. *Weak and Electromagnetic Interactions*. Conf.Proc., 1968. **C680519**: 367–377.
 - [18] G. 't Hooft and M. Veltman. *Regularization and renormalization of gauge fields*. Nuclear Physics B, 1972. **44**: 189 – 213.
 - [19] F. Englert and R. Brout. *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. Phys. Rev. Lett., 1964. **13**: 321–323.
 - [20] P. Higgs. *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*. Physics Letters, 1964. **12**: 132 – 133.
 - [21] P. W. Higgs. *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. Phys. Rev. Lett., 1964. **13**: 508–509.
 - [22] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. *Global Conservation Laws and Massless Particles*. Phys. Rev. Lett., 1964. **13**: 585–587.
 - [23] P. W. Higgs. *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*. Phys. Rev., 1966. **145**: 1156–1163.
 - [24] T. W. B. Kibble. *Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories*. Phys. Rev., 1967. **155**: 1554–1561.
 - [25] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, et al. *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the {ATLAS} detector at the {LHC}*. Physics Letters B, 2012. **716**: 1 – 29.
 - [26] S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. Sirunyan, et al. *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the {CMS} experiment at the {LHC}*. Physics Letters B, 2012. **716**: 30 – 61.
 - [27] D. A. Dicus and H.-J. He. *Scales of Mass Generation for Quarks, Leptons, and Majorana Neutrinos*. Phys. Rev. Lett., 2005. **94**: 221802.
 - [28] D. A. Dicus and H.-J. He. *Scales of fermion mass generation and electroweak symmetry breaking*. Phys. Rev. D, 2005. **71**: 093009.
 - [29] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov. *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*. Physics Letters B, 2008. **659**: 703 – 706.
 - [30] K. Hinterbichler. *Theoretical aspects of massive gravity*. Rev. Mod. Phys., 2012. **84**: 671–710.
 - [31] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner. *Republication of: The dynamics of general relativity*. General Relativity and Gravitation, 2008. **40**: 1997–2027. arXiv:gr-qc/0405109.
 - [32] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
 - [33] P. Ramond. *Field Theory*. Frontiers in Physics Series. Westview Press, 1997.
 - [34] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.

- [35] A. Starobinsky. *A new type of isotropic cosmological models without singularity*. Physics Letters B, 1980. **91**: 99 – 102.
- [36] S. Coleman and J. Mandula. *All Possible Symmetries of the S Matrix*. Phys. Rev., 1967. **159**: 1251–1256.
- [37] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. 3: Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2000.
- [38] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton university press, 1992.
- [39] J. D. Lykken. *Introduction to supersymmetry*. 1996. pages 85–153. arXiv:hep-th/9612114.
- [40] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [41] M. Grisaru, W. Siegel, and M. Roček. *Improved methods for supergraphs*. Nuclear Physics B, 1979. **159**: 429 – 450.
- [42] P. C. West. *Introduction to supersymmetry and supergravity*. World Scientific, 1990.
- [43] N. Seiberg. *Naturalness versus supersymmetric non-renormalization theorems*. Physics Letters B, 1993. **318**: 469 – 475.
- [44] S. Weinberg. *Nonrenormalization Theorems in Nonrenormalizable Theories*. Phys. Rev. Lett., 1998. **80**: 3702–3705.
- [45] N. Arkani-Hamed and S. Dimopoulos. *Supersymmetric unification without low energy supersymmetry and signatures for fine-tuning at the LHC*. Journal of High Energy Physics, 2005. **2005**: 073.
- [46] G. Giudice and A. Romanino. *Split supersymmetry*. Nuclear Physics B, 2004. **699**: 65 – 89.
- [47] S. P. Martin. *A Supersymmetry primer*. Adv. Ser. Direct. High Energy Phys., 2010. **21**: 1–153. arXiv:hep-ph/9709356.
- [48] U. Ellwanger, C. Hugonie, and A. M. Teixeira. *The Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model*. Physics Reports, 2010. **496**: 1 – 77.
- [49] M. Dine. *Supersymmetry and string theory: Beyond the standard model*. Cambridge University Press, 2007.
- [50] L. E. Ibáñez and A. M. Uranga. *String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology*. Cambridge University Press, 2012.
- [51] K. Olive *et al.* *Review of Particle Physics*. Chin. Phys., 2014. **C38**: 090001.
- [52] H. Georgi and S. L. Glashow. *Unity of All Elementary-Particle Forces*. Phys. Rev. Lett., 1974. **32**: 438–441.

-
- [53] J. C. Pati and A. Salam. *Unified Lepton-Hadron Symmetry and a Gauge Theory of the Basic Interactions*. Phys. Rev. D, 1973. **8**: 1240–1251.
 - [54] J. Ellis, J. Hagelin, S. Kelley, and D. Nanopoulos. *Aspects of the flipped unification of strong, weak and electromagnetic interactions*. Nuclear Physics B, 1988. **311**: 1 – 34.
 - [55] I. Antoniadis, J. Ellis, J. Hagelin, and D. Nanopoulos. *Supersymmetric flipped SU(5) revitalized*. Physics Letters B, 1987. **194**: 231 – 235.
 - [56] R. Marshak and R. Mohapatra. *Quark-lepton symmetry and $B - L$ as the $U(1)$ generator of the electroweak symmetry group*. Physics Letters B, 1980. **91**: 222 – 224.
 - [57] H. Murayama and A. Pierce. *Not even decoupling can save the minimal supersymmetric $SU(5)$ model*. Phys. Rev. D, 2002. **65**: 055009.
 - [58] R. N. Mohapatra. *Unification and supersymmetry: the frontiers of quark-lepton physics*. Springer Science & Business Media, 2003.
 - [59] P. van Nieuwenhuizen. *Supergravity*. Physics Reports, 1981. **68**: 189 – 398.
 - [60] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring theory*. Cambridge University Press Cambridge, 1987.
 - [61] J. Polchinski. *String Theory (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
 - [62] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2006.
 - [63] E. Kiritsis. *String theory in a nutshell*. Princeton University Press, 2011.
 - [64] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and D. Nanopoulos. *Naturally vanishing cosmological constant in $N=1$ supergravity*. Physics Letters B, 1983. **133**: 61 – 66.
 - [65] J. Ellis, C. Kounnas, and D. Nanopoulos. *No-scale supersymmetric {GUTs}*. Nuclear Physics B, 1984. **247**: 373 – 395.
 - [66] A. Lahanas and D. Nanopoulos. *The road to no-scale supergravity*. Physics Reports, 1987. **145**: 1 – 139.
 - [67] E. Witten. *Dimensional reduction of superstring models*. Physics Letters B, 1985. **155**: 151 – 155.
 - [68] C. Rovelli. *Quantum gravity*. Cambridge University Press, 2004.
 - [69] T. Thiemann. *Modern canonical quantum general relativity*. Cambridge University Press, 2007.
 - [70] M. Reuter and F. Saueressig. *From big bang to asymptotic de Sitter: complete cosmologies in a quantum gravity framework*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2005. **2005**: 012. arXiv:hep-th/0507167.

-
- [71] M. Reuter and F. Saueressig. *Asymptotic Safety, Fractals, and Cosmology*. Lect.Notes Phys., 2013. **863**: 185–223.
 - [72] R. Percacci. *A Short introduction to asymptotic safety*. 2011. pages 123–142. arXiv:1110.6389.
 - [73] D. F. Litim. *Renormalisation group and the Planck scale*. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 2011. **A369**: 2759–2778. arXiv:1102.4624.
 - [74] S. Weinberg. *Critical Phenomena for Field Theorists*. 1976. page 1.
 - [75] S. Weinberg. *Ultraviolet Divergences In Quantum Theories Of Gravitation*. 1980. pages 790–831.
 - [76] P. Hořava. *Membranes at quantum criticality*. Journal of High Energy Physics, 2009. **2009**: 020.
 - [77] P. Hořava. *Quantum gravity at a Lifshitz point*. Phys. Rev. D, 2009. **79**: 084008.
 - [78] P. Hořava. *Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point*. Phys. Rev. Lett., 2009. **102**: 161301.
 - [79] P. Hořava and C. M. Melby-Thompson. *General covariance in quantum gravity at a Lifshitz point*. Phys. Rev. D, 2010. **82**: 064027.
 - [80] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. *Emergence of a 4D World from Causal Quantum Gravity*. Phys. Rev. Lett., 2004. **93**: 131301.
 - [81] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. *Semiclassical universe from first principles*. Physics Letters B, 2005. **607**: 205 – 213.
 - [82] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. *The Spectral Dimension of the Universe is Scale Dependent*. Phys. Rev. Lett., 2005. **95**: 171301.
 - [83] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. *Reconstructing the Universe*. Phys. Rev. D, 2005. **72**: 064014.
 - [84] S. Carlip. *The Small Scale Structure of Spacetime*. 2009. pages 69–84. arXiv:1009.1136.
 - [85] S. Carlip. *Spontaneous Dimensional Reduction in Short-Distance Quantum Gravity?* AIP Conf. Proc., 2009. **1196**: 72. arXiv:0909.3329.
 - [86] S. Carlip. *Spontaneous Dimensional Reduction?* AIP Conf. Proc., 2012. **1483**: 63–72. arXiv:1207.4503.
 - [87] C. Anderson, S. J. Carlip, J. H. Cooperman, et al. *Quantizing Hořava-Lifshitz gravity via causal dynamical triangulations*. Phys. Rev. D, 2012. **85**: 044027.
 - [88] M. Reuter and F. Saueressig. *Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation*. Phys. Rev. D, 2002. **65**: 065016.

- [89] H.-J. He and Z.-Z. Xianyu. *Spontaneous spacetime reduction and unitary weak boson scattering at the LHC*. Physics Letters B, 2013. **720**: 142 – 147.
- [90] H.-J. He and Z.-Z. Xianyu. *Unitary Standard Model from Spontaneous Dimensional Reduction and Weak Boson Scattering at the LHC*. Eur. Phys. J. Plus, 2013. **128**: 40.
- [91] K. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [92] G. Calcagni. *Gravity on a multifractal*. Physics Letters B, 2011. **697**: 251 – 253.
- [93] G. Calcagni. *Fractal Universe and Quantum Gravity*. Phys. Rev. Lett., 2010. **104**: 251301.
- [94] M. Arzano, G. Calcagni, D. Oriti, and M. Scalisi. *Fractional and noncommutative spacetimes*. Phys. Rev. D, 2011. **84**: 125002.
- [95] G. Calcagni. *Discrete to continuum transition in multifractal spacetimes*. Phys. Rev. D, 2011. **84**: 061501.
- [96] G. Calcagni. *Geometry of fractional spaces*. Adv.Theor.Math.Phys., 2012. **16**: 549–644. arXiv:1106.5787.
- [97] G. Calcagni. *Geometry and field theory in multi-fractional spacetime*. Journal of High Energy Physics, 2012. **2012**: 65.
- [98] T. Appelquist and C. Bernard. *Strongly interacting Higgs bosons*. Phys. Rev. D, 1980. **22**: 200–213.
- [99] A. C. Longhitano. *Heavy Higgs bosons in the Weinberg-Salam model*. Phys. Rev. D, 1980. **22**: 1166–1175.
- [100] A. C. Longhitano. *Low-energy impact of a heavy Higgs boson sector*. Nuclear Physics B, 1981. **188**: 118 – 154.
- [101] J. Schwinger. *Gauge Invariance and Mass. II*. Phys. Rev., 1962. **128**: 2425–2429.
- [102] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. *Topologically massive gauge theories*. Annals of Physics, 1982. **140**: 372 – 411.
- [103] M. Soldate. *Partial-wave unitarity and closed-string amplitudes*. Physics Letters B, 1987. **186**: 321 – 327.
- [104] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover New York, 1972.
- [105] J. Basdevant. *The Pade approximation and its physical applications*. Fortsch.Phys., 1972. **20**: 283–331.
- [106] T. N. Truong. *Chiral Perturbation Theory and Final-State Theorem*. Phys. Rev. Lett., 1988. **61**: 2526–2529.

- [107] D. A. Dicus and W. W. Repko. *Padé approximants and unitarity in W^+W^- and Z^0Z^0 scattering*. Phys. Rev. D, 1990. **42**: 3660–3667.
- [108] O. Cheyette and M. K. Gaillard. *The effective one-loop action in the strongly interacting standard electroweak theory*. Physics Letters B, 1987. **197**: 205 – 212.
- [109] C. Du, H.-J. He, Y.-P. Kuang, et al. *Discovering new gauge bosons of electroweak symmetry breaking at LHC-8*. Phys. Rev. D, 2012. **86**: 095011.
- [110] H.-J. He, Y.-P. Kuang, Y.-H. Qi, et al. *CERN LHC signatures of new gauge bosons in the minimal Higgsless model*. Phys. Rev. D, 2008. **78**: 031701.
- [111] A. S. Belyaev, R. S. Chivukula, N. D. Christensen, et al. *$W_L W_L$ scattering in Higgsless models: Identifying better effective theories*. Phys. Rev. D, 2009. **80**: 055022.
- [112] T. Abe, N. Chen, and H.-J. He. *LHC Higgs signatures from extended electroweak gauge symmetry*. Journal of High Energy Physics, 2013. **2013**: 82.
- [113] X.-F. Wang, C. Du, and H.-J. He. *LHC Higgs signatures from topflavor seesaw mechanism*. Physics Letters B, 2013. **723**: 314 – 323.
- [114] C. T. Hill and E. H. Simmons. *Strong dynamics and electroweak symmetry breaking*. Physics Reports, 2003. **381**: 235 – 402.
- [115] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*. Phys. Rev. Lett., 1980. **44**: 912–915.
- [116] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. *Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation*. Phys. Rev. D, 1981. **23**: 165–180.
- [117] J. L. Hewett and T. G. Rizzo. *Collider signals of gravitational fixed points*. Journal of High Energy Physics, 2007. **2007**: 009.
- [118] D. F. Litim and T. Plehn. *Signatures of Gravitational Fixed Points at the Large Hadron Collider*. Phys. Rev. Lett., 2008. **100**: 131301.
- [119] P. Fischer and D. F. Litim. *Fixed points of quantum gravity in extra dimensions*. Physics Letters B, 2006. **638**: 497 – 502.
- [120] E. Gerwick. *Asymptotically Safe Gravitons in Electroweak Precision Physics*. Eur. Phys. J. C, 2011. **C71**: 1676.
- [121] X. Calmet. *Asymptotically safe weak interactions*. Mod. Phys. Lett. A, 2011. **26**: 1571–1576.
- [122] L. Anchordoqui, D. C. Dai, M. Fairbairn, G. Landsberg, and D. Stojkovic. *Vanishing Dimensions and Planar Events at the LHC*. Mod. Phys. Lett., 2012. **A27**: 1250021.
- [123] L. A. Anchordoqui, D. C. Dai, H. Goldberg, et al. *Searching for the layered structure of space at the LHC*. Phys. Rev. D, 2011. **83**: 114046.

-
- [124] J. Mureika and D. Stojkovic. *Detecting Vanishing Dimensions via Primordial Gravitational Wave Astronomy*. Phys. Rev. Lett., 2011. **106**: 101101.
 - [125] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, G. Gubitosi, and J. a. Magueijo. *Dimensional reduction in the sky*. Phys. Rev. D, 2013. **87**: 123532.
 - [126] Z.-Z. Xianyu and H.-J. He. *Asymptotically safe Higgs inflation*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **1410**: 083.
 - [127] V. A. Kostelecký and N. Russell. *Data tables for Lorentz and CPT violation*. Rev. Mod. Phys., 2011. **83**: 11–31.
 - [128] F. W. Stecker. *A new limit on Planck scale Lorentz violation from γ -ray burst polarization*. Astroparticle Physics, 2011. **35**: 95 – 97.
 - [129] A. Zamolodchikov. *Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory*. JETP Lett., 1986. **43**: 730–732.
 - [130] Z. Komargodski and A. Schwimmer. *On renormalization group flows in four dimensions*. Journal of High Energy Physics, 2011. **2011**: 99.
 - [131] Y. Nakayama. *Scale invariance vs conformal invariance*. Physics Reports, 2015. **569**: 1 – 93.
 - [132] V. Faraoni, E. Gunzig, and P. Nardone. *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*. Fund.Cosmic Phys., 1999. **20**: 121. arXiv:gr-qc/9811047.
 - [133] Z.-Z. Xianyu, J. Ren, and H.-J. He. *Gravitational interaction of Higgs boson and weak boson scattering*. Phys. Rev. D, 2013. **88**: 096013.
 - [134] J. Ren, Z.-Z. Xianyu, and H.-J. He. *Higgs gravitational interaction, weak boson scattering, and Higgs inflation in Jordan and Einstein frames*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **1406**: 032.
 - [135] B. W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker. *Strength of Weak Interactions at Very High Energies and the Higgs Boson Mass*. Phys. Rev. Lett., 1977. **38**: 883–885.
 - [136] M. Atkins and X. Calmet. *Bounds on the Nonminimal Coupling of the Higgs Boson to Gravity*. Phys. Rev. Lett., 2013. **110**: 051301.
 - [137] T. Han and S. Willenbrock. *Scale of quantum gravity*. Physics Letters B, 2005. **616**: 215 – 220.
 - [138] M. Atkins and X. Calmet. *On the unitarity of linearized General Relativity coupled to matter*. Physics Letters B, 2011. **695**: 298 – 302.
 - [139] I. L. Buchbinder, S. Odintsov, and L. Shapiro. *Effective action in quantum gravity*. CRC Press, 1992.
 - [140] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, C. Kiefer, A. A. Starobinsky, and C. Steinwachs. *Asymptotic freedom in inflationary cosmology with a non-minimally coupled Higgs field*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2009. **2009**: 003.

- [141] K. Allison. *Higgs ξ -inflation for the 125-126 GeV Higgs: a two-loop analysis*. Journal of High Energy Physics, 2014. **2014**: 40.
- [142] R. N. Lerner and J. McDonald. *Distinguishing Higgs inflation and its variants*. Phys. Rev. D, 2011. **83**: 123522.
- [143] A. H. Guth. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Phys. Rev. D, 1981. **23**: 347–356.
- [144] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*. Phys. Rev. Lett., 1982. **48**: 1220–1223.
- [145] A. Linde. *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. Physics Letters B, 1982. **108**: 389 – 393.
- [146] A. Linde. *Chaotic inflation*. Physics Letters B, 1983. **129**: 177 – 181.
- [147] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov. *Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. (In Russian)*. JETP Lett., 1981. **33**: 532–535.
- [148] S. Hawking. *The development of irregularities in a single bubble inflationary universe*. Physics Letters B, 1982. **115**: 295 – 297.
- [149] A. Starobinsky. *Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations*. Physics Letters B, 1982. **117**: 175 – 178.
- [150] A. H. Guth and S.-Y. Pi. *Fluctuations in the New Inflationary Universe*. Phys. Rev. Lett., 1982. **49**: 1110–1113.
- [151] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: Principle and applications of general theory of relativity*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
- [152] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [153] S. Dodelson. *Modern cosmology*. Academic press, 2003.
- [154] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [155] K. A. Olive. *Inflation*. Physics Reports, 1990. **190**: 307 – 403.
- [156] D. H. Lyth and A. Riotto. *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*. Physics Reports, 1999. **314**: 1 – 146.
- [157] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin. *Encyclopædia Inflationaris*. Physics of the Dark Universe, 2014. **5–6**: 75 – 235. Hunt for Dark Matter, arXiv:1303.3787.
- [158] Y. Wang. *Inflation, Cosmic Perturbations and Non-Gaussianities*. Communications in Theoretical Physics, 2014. **62**: 109.

-
- [159] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
 - [160] A. Linde. *Inflationary cosmology*. Springer, 2007.
 - [161] D. H. Lyth and A. R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, 2009.
 - [162] D. Baumann and L. McAllister. *Inflation and string theory*. Cambridge University Press, 2015.
 - [163] J. Maldacena. *Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*. Journal of High Energy Physics, 2003. **2003**: 013.
 - [164] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto. *Non-Gaussianity from inflation: theory and observations*. Physics Reports, 2004. **402**: 103 – 266.
 - [165] X. Chen. *Primordial Non-Gaussianities from Inflation Models*. Adv. Astron., 2010. **2010**: 638979. arXiv:1002.1416.
 - [166] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. *Reheating after Inflation*. Phys. Rev. Lett., 1994. **73**: 3195–3198.
 - [167] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky. *Towards the theory of reheating after inflation*. Phys. Rev. D, 1997. **56**: 3258–3295.
 - [168] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands. *Inflation dynamics and reheating*. Rev. Mod. Phys., 2006. **78**: 537–589.
 - [169] L. Dai, M. Kamionkowski, and J. Wang. *Reheating Constraints to Inflationary Models*. Phys. Rev. Lett., 2014. **113**: 041302.
 - [170] F. Bezrukov. *The Higgs field as an inflaton*. Classical and Quantum Gravity, 2013. **30**: 214001.
 - [171] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration). *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. 2015. arXiv:1502.01589.
 - [172] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration). *Planck 2015. XX. Constraints on inflation*. 2015. arXiv:1502.02114.
 - [173] A. Spencer-Smith. *Higgs Vacuum Stability in a Mass-Dependent Renormalisation Scheme*. 2014. arXiv:1405.1975.
 - [174] J. L. F. Barbón and J. R. Espinosa. *On the Naturalness of Higgs inflation*. Phys. Rev. D, 2009. **79**: 081302.
 - [175] C. Burgess, H. M. Lee, and M. Trott. *Power-counting and the validity of the classical approximation during inflation*. Journal of High Energy Physics, 2009. **2009**: 103.
 - [176] C. Burgess, H. Lee, and M. Trott. *On Higgs inflation and naturalness*. Journal of High Energy Physics, 2010. **2010**: 7.

- [177] M. Hertzberg. *On inflation with non-minimal coupling*. Journal of High Energy Physics, 2010. **2010**: 23.
- [178] R. N. Lerner and J. McDonald. *Higgs inflation and naturalness*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010. **2010**: 015.
- [179] R. N. Lerner and J. McDonald. *Unitarity-violation in generalized Higgs inflation models*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2012. **2012**: 019.
- [180] M. Atkins and X. Calmet. *Remarks on Higgs inflation*. Physics Letters B, 2011. **697**: 37 – 40.
- [181] J. García-Bellido, D. G. Figueroa, and J. Rubio. *Preheating in the standard model with the Higgs inflaton coupled to gravity*. Phys. Rev. D, 2009. **79**: 063531.
- [182] F. Bezrukov, D. Gorbunov, and M. Shaposhnikov. *On initial conditions for the hot big bang*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2009. **0906**: 029.
- [183] C. Germani and A. Kehagias. *New Model of Inflation with Nonminimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity*. Phys. Rev. Lett., 2010. **105**: 011302.
- [184] C. Germani and A. Kehagias. *Cosmological perturbations in the new Higgs inflation*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010. **2010**: 019.
- [185] C. Germani, Y. Watanabe, and N. Wintergerst. *Self-unitarization of New Higgs Inflation and compatibility with Planck and BICEP2 data*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **2014**: 009.
- [186] K. Kamada, T. Kobayashi, T. Takahashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama. *Generalized Higgs inflation*. Phys. Rev. D, 2012. **86**: 023504.
- [187] I. Masina and A. Notari. *Standard Model False Vacuum Inflation: Correlating the Tensor-to-Scalar Ratio to the Top Quark and Higgs Boson Masses*. Phys. Rev. Lett., 2012. **108**: 191302.
- [188] I. Masina and A. Notari. *Inflation from the Higgs field false vacuum with hybrid potential*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2012. **2012**: 031.
- [189] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov, and S. Sibiryakov. *Higgs inflation: consistency and generalisations*. Journal of High Energy Physics, 2011. **2011**: 16.
- [190] G. F. Giudice and H. M. Lee. *Unitarizing Higgs inflation*. Physics Letters B, 2011. **694**: 294 – 300.
- [191] A. D. Simone, M. P. Hertzberg, and F. Wilczek. *Running inflation in the Standard Model*. Physics Letters B, 2009. **678**: 1 – 8.
- [192] G. Aad *et al.* (ATLAS and CMS collaborations). *Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments*. 2015. arXiv:1503.07589.

-
- [193] The ATLAS, CDF, CMS, D0, Collaborations. *First combination of Tevatron and LHC measurements of the top-quark mass*. 2014. arXiv:1403.4427.
 - [194] A. Hook, J. Kearney, B. Shakya, and K. Zurek. *Probable or improbable universe? Correlating electroweak vacuum instability with the scale of inflation*. Journal of High Energy Physics, 2015. **2015**: 61.
 - [195] M. Herranen, T. Markkanen, S. Nurmi, and A. Rajantie. *Spacetime Curvature and the Higgs Stability During Inflation*. Phys. Rev. Lett., 2014. **113**: 211102.
 - [196] J. Kearney, H. Yoo, and K. M. Zurek. *Is a Higgs Vacuum Instability Fatal for High-Scale Inflation?* 2015. arXiv:1503.05193.
 - [197] F. Bezrukov, M. Kalmykov, B. Kniehl, and M. Shaposhnikov. *Higgs boson mass and new physics*. Journal of High Energy Physics, 2012. **2012**: 140.
 - [198] A. Salvio. *Higgs inflation at {NNLO} after the boson discovery*. Physics Letters B, 2013. **727**: 234 – 239.
 - [199] K. Enqvist, T. Meriniemi, and S. Nurmi. *Higgs dynamics during inflation*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **2014**: 025.
 - [200] S. Coleman and E. Weinberg. *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*. Phys. Rev. D, 1973. **7**: 1888–1910.
 - [201] R. Jackiw. *Functional evaluation of the effective potential*. Phys. Rev. D, 1974. **9**: 1686–1701.
 - [202] H.-J. He and Z.-Z. Xianyu. *in preparation*.
 - [203] M. Shaposhnikov and D. Zenhäusern. *Quantum scale invariance, cosmological constant and hierarchy problem*. Physics Letters B, 2009. **671**: 162 – 166.
 - [204] M. Shaposhnikov and D. Zenhäusern. *Scale invariance, unimodular gravity and dark energy*. Physics Letters B, 2009. **671**: 187 – 192.
 - [205] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, and A. A. Starobinsky. *Inflation scenario via the Standard Model Higgs boson and LHC*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2008. **2008**: 021.
 - [206] C. F. Steinwachs and A. Y. Kamenshchik. *Non-minimal Higgs Inflation and Frame Dependence in Cosmology*. AIP Conf.Proc., 2012. **1514**: 161–164. arXiv:1301.5543.
 - [207] A. Y. Kamenshchik and C. F. Steinwachs. *Frame Dependence of Quantum Corrections in Cosmology*. 2014. arXiv:1408.5769.
 - [208] G. Vilkovisky. *The unique effective action in quantum field theory*. Nuclear Physics B, 1984. **234**: 125 – 137.
 - [209] D. P. George, S. Mooij, and M. Postma. *Effective action for the Abelian Higgs model in FLRW*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2012. **2012**: 043.

- [210] D. P. George, S. Mooij, and M. Postma. *Quantum corrections in Higgs inflation: the real scalar case*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **2014**: 024.
- [211] M. Postma and M. Volponi. *Equivalence of the Einstein and Jordan frames*. Phys. Rev. D, 2014. **90**: 103516.
- [212] R. N. Lerner and J. McDonald. *Gauge singlet scalar as inflaton and thermal relic dark matter*. Phys. Rev. D, 2009. **80**: 123507.
- [213] J. R. Espinosa, G. F. Giudice, and A. Riotto. *Cosmological implications of the Higgs mass measurement*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2008. **0805**: 002.
- [214] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov. *Standard model Higgs boson mass from inflation: two loop analysis*. Journal of High Energy Physics, 2009. **0907**: 089.
- [215] Y. Hamada, H. Kawai, K.-y. Oda, and S. C. Park. *Higgs Inflation is Still Alive after the Results from BICEP2*. Phys. Rev. Lett., 2014. **112**: 241301.
- [216] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda. *Minimal Higgs inflation*. PTEP, 2014. **2014**: 023B02. arXiv:1308.6651.
- [217] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov. *Higgs inflation at the critical point*. Physics Letters B, 2014. **734**: 249 – 254.
- [218] P. A. R. Ade *et al.* (BICEP2 Collaboration). *Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2*. Phys. Rev. Lett., 2014. **112**: 241101.
- [219] P. A. R. Ade *et al.* (BICEP2/Keck and Planck Collaborations). *Joint Analysis of BICEP2/ Keck Array and Planck Data*. Phys. Rev. Lett., 2015. **114**: 101301.
- [220] Y. Hamada, H. Kawai, K.-y. Oda, and S. C. Park. *Higgs inflation from Standard Model criticality*. 2014. arXiv:1408.4864.
- [221] I. Oda and T. Tomoyose. *Quadratic Chaotic Inflation from Higgs Inflation*. Adv. Stud. Theor. Phys., 2014. **8**: 551. arXiv:1404.1538.
- [222] H.-J. He and Z.-Z. Xianyu. *Extending Higgs inflation with TeV scale new physics*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **1410**: 019.
- [223] J. Ellis and D. Ross. *A light Higgs boson would invite supersymmetry*. Physics Letters B, 2001. **506**: 331 – 336.
- [224] S. Dawson and E. Furlan. *A Higgs conundrum with vector fermions*. Phys. Rev. D, 2012. **86**: 015021.
- [225] M.-L. Xiao and J.-H. Yu. *Stabilizing electroweak vacuum in a vectorlike fermion model*. Phys. Rev. D, 2014. **90**: 014007.

-
- [226] S. Ellis, R. Godbole, S. Gopalakrishna, and J. Wells. *Survey of vector-like fermion extensions of the Standard Model and their phenomenological implications*. Journal of High Energy Physics, 2014. **1409**: 130.
- [227] Y. Zeldovich, I. Y. Kobzarev, and L. Okun. *Cosmological Consequences of the Spontaneous Breakdown of Discrete Symmetry*. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1974. **67**: 3–11.
- [228] P. Ko and W.-I. Park. *Higgs-portal assisted Higgs inflation with a large tensor-to-scalar ratio*. 2014. arXiv:1405.1635.
- [229] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda. *Predictions on mass of Higgs portal scalar dark matter from Higgs inflation and flat potential*. Journal of High Energy Physics, 2014. **1407**: 26.
- [230] N. Haba, H. Ishida, and R. Takahashi. *Higgs inflation and Higgs portal dark matter with right-handed neutrinos*. 2014. arXiv:1405.5738.
- [231] N. Haba and R. Takahashi. *Higgs inflation with singlet scalar dark matter and right-handed neutrino in light of BICEP2*. Phys. Rev. D, 2014. **89**: 115009.
- [232] J. Rubio and M. Shaposhnikov. *Higgs-Dilaton cosmology: Universality versus criticality*. Phys. Rev. D, 2014. **90**: 027307.
- [233] S. Ferrara, R. Kallosh, A. Linde, A. Marrani, and A. Van Proeyen. *Jordan frame supergravity and inflation in the NMSSM*. Phys. Rev. D, 2010. **82**: 045003.
- [234] S. Ferrara, R. Kallosh, A. Linde, A. Marrani, and A. Van Proeyen. *Superconformal symmetry, NMSSM, and inflation*. Phys. Rev. D, 2011. **83**: 025008.
- [235] R. Kallosh, L. Kofman, A. Linde, and A. V. Proeyen. *Superconformal symmetry, supergravity and cosmology*. Classical and Quantum Gravity, 2000. **17**: 4269.
- [236] M. B. Einhorn and D. T. Jones. *Inflation with non-minimal gravitational couplings in supergravity*. Journal of High Energy Physics, 2010. **1003**: 26.
- [237] M. Arai, S. Kawai, and N. Okada. *Higgs inflation in minimal supersymmetric $SU(5)$ grand unified theory*. Phys. Rev. D, 2011. **84**: 123515.
- [238] M. Arai, S. Kawai, and N. Okada. *Higgs-lepton inflation in the supersymmetric minimal seesaw model*. Phys. Rev. D, 2013. **87**: 065009.
- [239] M. P. Hertzberg and F. Wilczek. *Inflation Driven by Unification Energy*. 2014. arXiv:1407.6010.
- [240] J. Ellis, T. E. Gonzalo, J. Harz, and W.-C. Huang. *Flipped GUT Inflation*. 2014. arXiv:1412.1460.
- [241] C. Pallis and N. Toumbas. *Non-minimal Higgs inflation and non-thermal leptogenesis in a supersymmetric Pati-Salam model*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2011. **1112**: 002.

-
- [242] M. B. Einhorn and D. T. Jones. *GUT scalar potentials for Higgs inflation*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2012. **1211**: 049.
 - [243] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration). *Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation*. Astron.Astrophys., 2014. **571**: A22. arXiv:1303.5082.
 - [244] J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *No-Scale Supergravity Realization of the Starobinsky Model of Inflation*. Phys. Rev. Lett., 2013. **111**: 111301.
 - [245] J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *Starobinsky-like inflationary models as avatars of no-scale supergravity*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2013. **1310**: 009.
 - [246] D. Croon, J. Ellis, and N. E. Mavromatos. *Wess–Zumino inflation in light of Planck*. Physics Letters B, 2013. **724**: 165 – 169.
 - [247] J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *A no-scale supergravity framework for sub-Planckian physics*. Phys. Rev. D, 2014. **89**: 043502.
 - [248] J. Ellis, M. A. García, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *Two-field analysis of no-scale supergravity inflation*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2015. **1501**: 010.
 - [249] J. Ellis, M. A. García, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *A no-scale inflationary model to fit them all*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **1408**: 044.
 - [250] J. Ellis, M. A. García, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *Resurrecting quadratic inflation in no-scale supergravity in light of BICEP2*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014. **1405**: 037.
 - [251] J. Ellis, M. A. G. Garcia, D. V. Nanopoulos, and K. A. Olive. *Phenomenological Aspects of No-Scale Inflation Models*. 2015. arXiv:1503.08867.
 - [252] M. Kawasaki, M. Yamaguchi, and T. Yanagida. *Natural Chaotic Inflation in Supergravity*. Phys. Rev. Lett., 2000. **85**: 3572–3575.
 - [253] K. Harigaya, M. Ibe, and T. T. Yanagida. *Lower bound on the gravitino mass $m_{3/2} > O(100) \text{TeV}$ in R-symmetry breaking new inflation*. Phys. Rev. D, 2014. **89**: 055014.
 - [254] J. Ellis, H.-J. He, and Z.-Z. Xianyu. *New Higgs inflation in a no-scale supersymmetric SU(5) GUT*. Phys. Rev. D, 2015. **91**: 021302.
 - [255] T. Goto and T. Nihei. *Effect of an RRRR dimension 5 operator on proton decay in the minimal SU(5) SUGRA GUT model*. Phys. Rev. D, 1999. **59**: 115009.
 - [256] J. Ellis, H.-J. He, and Z.-Z. Xianyu. *in preparation*.
 - [257] J.-E. Daum, U. Harst, and M. Reuter. *Running gauge coupling in asymptotically safe quantum gravity*. Journal of High Energy Physics, 2010. **1001**: 84.
 - [258] G. Narain and C. Rahmede. *Renormalization group flow in scalar-tensor theories: II. Classical and Quantum Gravity*, 2010. **27**: 075002.

- [259] M. Shaposhnikov and C. Wetterich. *Asymptotic safety of gravity and the Higgs boson mass*. Physics Letters B, 2010. **683**: 196 – 200.
- [260] S. Weinberg. *Asymptotically safe inflation*. Phys. Rev. D, 2010. **81**: 083535.
- [261] N. Arkani-Hamed and J. Maldacena. *Cosmological Collider Physics*. 2015. arXiv:1503.08043.
- [262] X. O. Camanho, J. D. Edelstein, J. Maldacena, and A. Zhiboedov. *Causality Constraints on Corrections to the Graviton Three-Point Coupling*. 2014. arXiv:1407.5597.
- [263] L. E. Ibáñez and I. Valenzuela. *The inflaton as an MSSM Higgs and open string modulus monodromy inflation*. Physics Letters B, 2014. **736**: 226 – 230.
- [264] L. Ibáñez, F. Marchesano, and I. Valenzuela. *Higgs-otic inflation and string theory*. Journal of High Energy Physics, 2015. **2015**: 128.
- [265] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda. *Eternal Higgs inflation and cosmological constant problem*. 2015. arXiv:1501.04455.

致 谢

五年光阴何其短暂，然而我却有机会用它来思考宇宙 140 亿年的演化，实在是无上的幸运。此处，能有机会感谢这 5 年中帮助过我的各位师长亲友，使我感到愉悦。

感谢我的导师何红建教授。何老师对我学业与研究上的帮助难以尽举。我不禁想起过去 6 年里，与何老师无数次的讨论。无数次，我们在办公室的大黑板前从午后讨论到日落，从清华园东南的办公楼一路讨论到“校河”北端的尽头。我们会坐在何老师家中的书桌前讨论，面对着一张 Einstein 老先生的大幅相片。然而更多的是电话中和 Skype 上以小时计数的讨论。面对如此历历在目的情景，再多美好的词语也显得虚弱不堪。

感谢我在 King's College London 访问期间的导师 John Ellis 教授。John 学识渊博，对物理问题有敏锐的洞察力。同他的讨论总能保持简洁和高效，这给我留下很深的印象。同样使我印象深刻的还有他工作狂式的风格、他对超对称的“信仰”，还有他健步如飞时被风吹起的白发与长须。

感谢我所在研究组的各位同门：葛韶锋、王旭峰、杜春、任婧、吕岚春、许勋杰。感谢各位在组会上和平日的讨论中同我分享的知识。特别感谢任婧师姐在过去的合作中同我的许多往返讨论。

感谢参加过我们 2010 – 2013 年“量子场论讨论班”的各位同好。这几年中每周末的讨论班是我美好的回忆。也感谢连云龙、肖潇，以及过去 5 年中一同讨论过物理问题的其他难以具名的同学。

感谢 Steven Carlip、Michael Chanowitz、Sekhar Chivukula、Andrew Cohen、Petr Hořava、Richard Lieu、Hitoshi Murayama、Lisa Randall、Raymond Volkas、Dejan Stojkovic、Raman Sundrum、陶嘉琳、王青诸位教授。过去 5 年中与他们为数不多然而深入的讨论给了我许多启发。

感谢各位给予我帮助、支持与鼓励的很多难以具名的亲友。

最后，感谢我的父母。没有他们的理解与支持，所有这一切都是不可能的。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

附录 A n 维时空散射振幅与散射截面的幺正性条件

本附录推导 n 维时空中分波散射振幅和散射截面的幺正性条件. 为简化推导, 假设所有的初末态粒子有相同的自旋.

在计算散射截面时, 我们需要末态相空间的积分. 对于两体末态, 相空间积分为,

$$\begin{aligned} & \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}(E, \theta)|^2 \\ &= \frac{1}{\rho_e} \int \frac{d^{n-1}p_1 d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2E_1 2E_2} |\mathbf{T}(E, \theta)|^2 (2\pi)^n \delta^{(n)}(p - p_1 - p_2) \\ &= \frac{1}{\rho_e} \int \frac{d^{n-1}p_1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2E_1 2E_2} |\mathbf{T}(E, \theta)|^2 (2\pi) \delta(E - E_1 - E_2), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

其中 ρ_e 是末态的全同性对称因子, 在末态粒子全同时取 2, 否则取 1. 为完成以上积分, 注意到 $(n-1)$ 维空间的积分测度可用球坐标重新表为,

$$d^{n-1}p = p^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \sin^{n-4} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} dp d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-3} d\varphi_{n-2}, \quad (\text{A.2})$$

而积分区域为 $0 \leq p < \infty$, $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ ($1 \leq i \leq n-3$), 以及 $0 \leq \varphi_{n-2} \leq 2\pi$. 对于 $2 \rightarrow 2$ 散射过程, 散射振幅可表为质心系能量 E 和散射角 φ_1 的函数, 即可写为 $f = f(E, \varphi_1)$. 故而可完成其余角向 φ_i ($1 \leq i \leq n-3$) 的积分如下,

$$\begin{aligned} & \int d^{n-1}p f(p, \varphi_1) \\ &= \int_0^\infty dp p^{n-2} \left(\prod_{i=2}^{n-3} \int_0^\pi d\varphi_i \sin^{n-i-2} \varphi_i \right) \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} f(p, \varphi_1) \\ &= \int_0^\infty dp p^{n-2} 2\pi \left(\prod_{i=2}^{n-3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-i-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i}{2})} \right) \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_1 f(p, \varphi_1) \\ &= \int_0^\infty dp p^{n-2} \frac{2\pi^{n/2-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_1 f(p, \varphi_1). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

将此结果带回相空间积分 (A.1), 即有,

$$\begin{aligned} & \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}(E, \theta)|^2 \\ &= \frac{1}{\rho_e (2\pi)^{n-2}} \frac{p_1^{n-2}}{2E_1 2E_2} \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_2}{E_2} \right)^{-1} \frac{2\pi^{n/2-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-3} \theta |\mathbf{T}(E, \theta)|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

其中已经将变量 φ_1 替换为更常用的散射角. 在质心系中, $E_1 = E_2 = E/2$ and $p_1 = p_2 \equiv p$, 其中 $p_1 \equiv |\vec{p}_1|$ 而 $p_2 \equiv |\vec{p}_2|$. 因此有,

$$\int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}(E, \theta)|^2 = \frac{1}{\rho_e 2^{n-1} \pi^{n/2-1} \Gamma(\frac{n}{2}-1)} \frac{p^{n-3}}{E} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-3} \theta |\mathbf{T}(E, \theta)|^2, \quad (\text{A.5})$$

此时只对 $n \geq 3$ 维时空成立. 然而为了处理 SDR 理论, 我们还需推导 $2 \leq n < 3$ 时的相空间积分 $d^{n-1}p$. 由于此时散射角无定义, 因而相空间积分可用以下方式完成,

$$\begin{aligned} & \int d\Pi_2^{(n)} (|\mathbf{T}(E, 0)|^2 + |\mathbf{T}(E, \pi)|^2) \\ &= \frac{\mathcal{C}}{\rho_e 2^{n-1} \pi^{(n-3)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{p^{n-3}}{E} (|\mathbf{T}(E, 0)|^2 + |\mathbf{T}(E, \pi)|^2), \quad (2 \leq n < 3), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中, 未知系数 \mathcal{C} 应使得 (A.5) 与 (A.6) 在 $n = 3$ 时给出相同的结果, 由此知,

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\pi (|\mathbf{T}(E, 0)|^2 \mathcal{C} + \mathcal{C} |\mathbf{T}(E, \pi)|^2)} \int_0^\pi d\theta |\mathbf{T}(E, \theta)|^2. \quad (\text{A.7})$$

现在, 我们分析 $n > 3$ 维时空中分波振幅的幺正性. 为此, 在幺正性条件的算子等式 $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = 2\text{Im}\mathcal{T}$ 两边取 2 粒子初末态的矩阵元, 并在此式左边插入一组完备的粒子态, 可得,

$$\int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 + \sum_N \int d\Pi_N^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow N)|^2 = 2\text{Im} \mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2), \quad (\text{A.8})$$

其中 $\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)$ 代表 $2 \rightarrow 2$ 弹性散射的振幅, 而 $\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow N)$ 代表 $2 \rightarrow N$ 非弹性散射的振幅, N 遍历所有可能的中间态. 由 (A.8) 可知,

$$\begin{aligned} & - \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 + 2\text{Im} \mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \\ &= \sum_N \int d\Pi_N^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow N)|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

现在, 用角动量的本征态分波展开以上振幅, 即用下式,

$$\mathbf{T}_{\text{el}}(E, \theta) = \lambda_n E^{4-n} \sum_\ell \frac{1}{N_\ell^\nu} C_\ell^\nu(1) C_\ell^\nu(\cos \theta) a_\ell^{\text{el}}(E), \quad (\text{A.10a})$$

$$a_\ell^{\text{el}}(E) = \frac{E^{n-4}}{\lambda_n C_\ell^\nu(1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-3} \theta C_\ell^\nu(\cos \theta) \mathbf{T}_{\text{el}}(E, \theta), \quad (\text{A.10b})$$

其中,

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 2(16\pi)^{(n/2)-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right), \\ \nu &= (n-3)/2, \\ N_\ell^\nu &= \frac{\pi \Gamma(\ell+2\nu)}{2^{2\nu-1} \ell! (\ell+\nu) \Gamma^2(\nu)}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

而 C_ℓ^ν 是 ℓ 阶 ν 度的 Gegenbauer 多项式，它满足如下正交条件，

$$\int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\nu-1/2} C_\ell^\nu(x) C_{\ell'}^\nu(x) = N_\ell^\nu \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{A.12a})$$

$$\sum_\ell \frac{1}{N_\ell^\nu} C_\ell^\nu(x) C_\ell^\nu(y) = (1-x^2)^{(1-2\nu)/4} (1-y^2)^{(1-2\nu)/4} \delta(x-y). \quad (\text{A.12b})$$

由 (A.10)，可完成 2 体末态的相空间积分如下，

$$\int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 = \frac{2\lambda_n}{\rho_e} \left(\frac{2p}{E}\right)^{n-3} E^{4-n} \sum_\ell \frac{[C_\ell^\nu(1)]^2}{N_\ell^\nu} |a_\ell^{\text{el}}|^2. \quad (\text{A.13})$$

于是，不等式 (A.9) 可用分波振幅表出如下，

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 + 2 \operatorname{Im} \mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \\ &= \frac{2\lambda_n E^{4-n}}{\rho_e} \sum_\ell \frac{[C_\ell^\nu(1)]^2}{N_\ell^\nu} \left[- \left(\frac{2p}{E}\right)^{n-3} |a_\ell^{\text{el}}|^2 + \rho_e \frac{C_\ell^\nu(\cos\theta)}{C_\ell^\nu(1)} \operatorname{Im} a_\ell^{\text{el}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

上式最后一行括号外的系数是正定的，因而此不等式给出，

$$0 \leq - \left(\frac{2p}{E}\right)^{n-3} |a_\ell^{\text{el}}|^2 + \rho_e \frac{C_\ell^\nu(\cos\theta)}{C_\ell^\nu(1)} \operatorname{Im} a_\ell^{\text{el}}. \quad (\text{A.15})$$

在散射能量远大于初末态粒子的质量时，有 $E \simeq 2p$ ，再注意到 Gegenbauer 多项式 $C_\ell^\nu(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 时满足 $C_\ell^\nu(1) \geq |C_\ell^\nu(x)|$ ，可化简上式为，

$$0 \leq -|a_\ell^{\text{el}}|^2 + \rho_e \operatorname{Im} a_\ell^{\text{el}} = \frac{\rho_e^2}{4} - (\operatorname{Re} a_\ell^{\text{el}})^2 - \left(\operatorname{Im} a_\ell^{\text{el}} - \frac{\rho_e}{2}\right)^2. \quad (\text{A.16})$$

由此，即可得到对分波振幅 a_ℓ^{el} 的幺正性条件如下，

$$(\operatorname{Re} a_\ell^{\text{el}})^2 + \left(\operatorname{Im} a_\ell^{\text{el}} - \frac{\rho_e}{2}\right)^2 \leq \frac{\rho_e^2}{4}, \quad (\text{A.17})$$

即，分波振幅应位于复平面上以 $i\rho_e/2$ 为圆心、 $\rho_e/2$ 为半径的圆内。特别地，这给出，

$$|\operatorname{Re} a_\ell^{\text{el}}| \leq \frac{\rho_e}{2}, \quad |a_\ell^{\text{el}}| \leq \rho_e. \quad (\text{A.18})$$

与此类似，可推导非弹性散射分波振幅 a_ℓ^{inel} 的幺正性条件。为此，将非弹性散射振幅 $\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow 2) \equiv \mathbf{T}_{\text{inel}}(E, \theta)$ 按分波展开如下，

$$\mathbf{T}_{\text{inel}}(E, \theta) = \lambda_n E^{4-n} \sum_\ell \frac{1}{N_\ell^\nu} C_\ell^\nu(1) C_\ell^\nu(\cos\theta) a_\ell^{\text{inel}}(E). \quad (\text{A.19})$$

当散射能量远高于初末态粒子质量时，

$$\int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow 2)|^2 = \frac{2\lambda_n E^{4-n}}{\rho_i} \sum_\ell \frac{[C_\ell^\nu(1)]^2}{N_\ell^\nu} |a_\ell^{\text{inel}}|^2, \quad (\text{A.20})$$

其中 ρ_i 是非弹性散射末态的全同性对称因子，当末态粒子全同时取 2，否则取 1。现在，由 (A.9)、(A.14)、(A.16)，以及 (A.20)，可得，

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_n E^{4-n}}{\rho_i} \sum_{\ell} \frac{[C_{\ell}^v(1)]^2}{N_{\ell}^v} |a_{\ell}^{\text{inel}}|^2 &\leq \sum_N \int d\Pi_N^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow N)|^2 \\ &= - \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 + 2\text{Im } \mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \\ &\leq \frac{2\lambda_n E^{4-n}}{\rho_e} \sum_{\ell} \frac{[C_{\ell}^v(1)]^2}{N_{\ell}^v} \frac{\rho_e^2}{4}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

由此即得非弹性散射分波振幅的幺正性条件如下，

$$|a_{\ell}^{\text{inel}}| \leq \frac{\sqrt{\rho_i \rho_e}}{2}. \quad (\text{A.22})$$

现在，假设散射振幅主要由 s 分波贡献，我们推导散射截面的幺正性条件。由 (A.9)、(A.13)，与 (A.18)，可得，

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) &= \frac{1}{2E^2} \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 \\ &= \frac{\lambda_n |a_0^{\text{el}}|^2}{\rho_e N_0^v} E^{2-n} \leq \frac{\lambda_n \rho_e}{N_0^v} E^{2-n}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

以及，

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{inel}}(2 \rightarrow N) &= \frac{1}{2E^2} \sum_N \int d\Pi_N^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{inel}}(2 \rightarrow N)|^2 \\ &= \frac{1}{2E^2} \left[- \int d\Pi_2^{(n)} |\mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2)|^2 + 2\text{Im } \mathbf{T}_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \right] \\ &\leq \frac{\lambda_n}{\rho_e} E^{2-n} \sum_{\ell} \frac{[C_{\ell}^v(1)]^2}{N_{\ell}^v} \left[\frac{\rho_e^2}{4} - (\text{Re } a_{\ell}^{\text{el}})^2 - \left(\text{Im } a_{\ell}^{\text{el}} - \frac{\rho_e}{2} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{\lambda_n \rho_e}{4N_0^v} E^{2-n}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

注意，以上两式右端在 $n \geq 2$ 时皆为 n 的光滑函数。若假设该限制亦是维数 n 的解析函数，则可由解析延拓的唯一性知，以上结果也可用于 $2 \leq n < 3$ ，虽然其推导在 $n \geq 3$ 进行。我们将散射截面的幺正性条件总结如下，

$$\sigma_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \leq \frac{\lambda_n \rho_e}{N_0^v} E^{2-n}, \quad \sigma_{\text{inel}}(2 \rightarrow N) \leq \frac{\lambda_n \rho_e}{4N_0^v} E^{2-n}. \quad (\text{A.25})$$

在 $(3+1)$ 维时空， $n = 4$ 而 $v = 1/2$ ，因而以上条件退化为熟知的结果 $\sigma_{\text{el}}(2 \rightarrow 2) \leq 16\pi\rho_e/E^2$ 和 $\sigma_{\text{inel}}(2 \rightarrow N) \leq 4\pi\rho_e/E^2$ 。

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1987 年 11 月 26 日出生于新疆五家渠市。

2006 年 9 月保送入清华大学理学院数理基础科学专业，2010 年 7 月本科毕业并获得理学学士学位。

2010 年 9 月免试进入清华大学工程物理系攻读物理学博士至今，其中 2013 年 10 月至 2014 年 3 月赴英国伦敦大学国王学院（King's College London）访学。

发表的学术论文

- [1] H.-J. He, X.-F. Wang, and **Z.-Z. Xianyu**, “*Gauge-invariant quantum gravity corrections to Callan-Symanzik beta functions via the Vilkovisky-DeWitt method and gravity-assisted gauge unification*”, Phys. Rev. D **83** (2011) 125014 [[arXiv:1008.1839](#)] (SCI 收录；检索号：775MV；影响因子：4.864)
- [2] H.-J. He and **Z.-Z. Xianyu**, “*Unitary standard model from spontaneous dimensional reduction and weak boson scattering at the LHC*”, Eur. Phys. J. Plus **128** (2013) 40 [[arXiv:1112.1028](#)] (SCI 收录；检索号：134MB；影响因子：1.475)
- [3] H.-J. He and **Z.-Z. Xianyu**, “*Spontaneous spacetime reduction and unitary weak boson scattering at the LHC*”, Phys. Lett. B **720** (2013) 142 [[arXiv:1301.4570](#)] (SCI 收录；检索号：111HX；影响因子：6.019)
- [4] **Z.-Z. Xianyu**, J. Ren, and H.-J. He, “*Gravitational interaction of Higgs boson and weak boson scattering*”, Phys. Rev. D **88** (2013) 096013 [[arXiv:1305.0251](#)] (SCI 收录；检索号：257MC；影响因子：4.864)
- [5] J. Ren, **Z.-Z. Xianyu**, and H.-J. He, “*Higgs Gravitational Interaction, Weak Boson Scattering, and Higgs Inflation in Jordan and Einstein Frames*”, JCAP **1406** (2014) 032 [[arXiv:1404.4627](#)] (SCI 收录；检索号：AW6WX；影响因子：5.877)

- [6] H.-J. He and **Z.-Z. Xianyu**, “*Extending Higgs Inflation with TeV Scale New Physics*”, JCAP **1410** (2014) 019 [[arXiv:1405.7331](https://arxiv.org/abs/1405.7331)] (SCI 收录; 检索号: AW0OA; 影响因子: 5.877)
- [7] **Z.-Z. Xianyu** and H.-J. He, “*Asymptotically Safe Higgs Inflation*”, JCAP **1410** (2014) 083 [[arXiv:1407.6993](https://arxiv.org/abs/1407.6993)] (SCI 收录; 检索号: AW0OA; 影响因子: 5.877)
- [8] J. Ellis, H.-J. He, and **Z.-Z. Xianyu**, “*New Higgs Inflation in a No-Scale Supersymmetric SU(5) GUT*”, Phys. Rev. D (Rapid Communication) **91** (2015) 021302 [[arXiv:1411.5537](https://arxiv.org/abs/1411.5537)] (SCI 收录; 检索号: CA2JF; 影响因子: 4.864)